

Topología Algebraica – Edición 2005
Práctica Cinco

- Sea $0 \rightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \rightarrow 0$ una sucesión exacta. Probar que son equivalentes:
 - f es sección.
 - g es retracción.
 - Existe un isomorfismo $\phi: N \rightarrow M \oplus P$ tal que $\phi f(m) = (m, 0)$ y $g\phi^{-1}(m, p) = p$.
- Hallar todos los grupos abelianos posibles M en las siguientes sucesiones exactas:
 - $0 \rightarrow \mathbb{Z}_2 \rightarrow M \rightarrow \mathbb{Z}_4 \rightarrow 0$
 - $0 \rightarrow \mathbb{Z}_m \rightarrow M \rightarrow \mathbb{Z}_n \rightarrow 0$
 - $0 \rightarrow \mathbb{Z}_m \rightarrow M \rightarrow \mathbb{Z}^n \rightarrow 0$

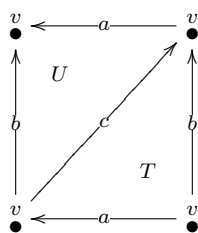
- (Lema de los 5) Dado el siguiente diagrama de filas exactas

$$\begin{array}{ccccccccc}
 M_1 & \longrightarrow & M_2 & \longrightarrow & M_3 & \longrightarrow & M_4 & \longrightarrow & M_5 \\
 a \downarrow & & b \downarrow & & c \downarrow & & d \downarrow & & e \downarrow \\
 N_1 & \longrightarrow & N_2 & \longrightarrow & N_3 & \longrightarrow & N_4 & \longrightarrow & N_5
 \end{array}$$

Probar que

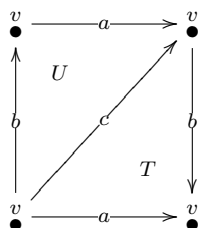
- Si b y d son mono y a es epi, entonces c es mono.
 - Si b y d son epi y e es mono, entonces c es epi.
 - Concluir que si a, b, d y e son iso, entonces c es iso.
- Sean (C_*, d) y (D_*, d') complejos. Probar que $(C_* \oplus D_*, d \oplus d')$ es un complejo y que

$$H_*(C \oplus D) = H_*(C) \oplus H_*(D).$$
 - Sea s un 2-simplex. Calcular la homología simplicial de s y de $\dot{s}$ (el borde de s). Observar que con ésto se está calculando la homología de D^2 y S^1 .
 - Calcular la homología simplicial del tetraedro (borde de un 3-simplex). Observar que se está calculando la homología de S^2 .
 - Calcular la homología de los siguientes Δ -complejos:
 - Toro



identificando las caras opuestas (a con a y b con b en la misma dirección).

- Botella de Klein



identificando las caras opuestas (a con a en la misma dirección y b con b en direcciones opuestas).

- c) El paracaídas triangular que se obtiene tomando un 2-simplex e identificando los 3 vértices en uno solo.
- d) El espacio X que se obtiene de un n -simplex identificando todas las caras de la misma dimensión (es decir, X tiene un k -simplex por cada $k \leq n$).

8. Sea X espacio topológico y $\{X_k\}$ familia de componentes arco conexas de X . Probar que

$$H_n(X) = \oplus H_n(X_k).$$

9. Sea A un subespacio de X . Probar que $H_0(X, A) = 0$ si y sólo si A interseca todas las componentes arco conexas de X .

10. a) Sea $A \subset X$ un subespacio. Un n -ciclo relativo es un elemento $\sigma \in S_n(X)$ tal que $d\sigma \in S_{n-1}(A)$ y un n -borde relativo es un elemento $\sigma \in S_n(X)$ tal que $\sigma = d\omega + \gamma$ con $\omega \in S_{n+1}(X)$ y $\gamma \in S_n(A)$. Probar que los elementos de $H_n(X, A)$ son las clases de los n -ciclos relativos y que la clase de un ciclo relativo σ es 0 si y sólo si σ es un borde relativo.
- b) Probar que el morfismo de conexión $\partial : H_n(X, A) \rightarrow H_{n-1}(A)$ de la sucesión exacta larga de homología relativa tiene la siguiente descripción: Si $\bar{\sigma}$ es la clase de un ciclo relativo en $H_n(X, A)$, $\partial(\bar{\sigma})$ es la clase del ciclo $d\sigma$ en $H_{n-1}(A)$.

11. Probar que una función continua de pares $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ induce un morfismo $f_* : H_n(X, A) \rightarrow H_n(Y, B) \forall n$ y que una homotopía de pares $h : f \simeq g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ induce una homotopía $\phi : f_* \simeq g_*$ entre los complejos relativos y por lo tanto $f_* = g_* : H_n(X, A) \rightarrow H_n(Y, B)$.

12. Sea $i : A \rightarrow X$ subespacio y sea $C(i)$ el cono de la inclusión i . Probar que $\tilde{H}_n(C(i)) = H_n(X, A)$.

13. a) Sea $\{X_i\}$ una familia de espacios topológicos y sea $x_i \in X_i$ tal que (X_i, x_i) es un par bueno para todo i , es decir existe un entorno abierto U_i de x_i tal que la inclusión del punto en el abierto es un retracts por deformación fuerte. Si $X = \bigvee_i X_i$ es la unión de los espacios, identificando todos los puntos bases x_i , probar que $\tilde{H}_n(X) = \oplus_i \tilde{H}_n(X_i)$.
- b) Calcular $\tilde{H}_n(\bigvee_{i \in \Lambda} S^k)$.

14. a) Sea $A \subset X$ retracto (es decir, existe $r : X \rightarrow A$ continua tal que $ri = 1_A$). Probar que $H_q(X) = H_q(A) \oplus H_q(X, A)$.
- b) Sea X espacio topológico y sea $p \in S^n$. Deducir del item anterior que

$$H_q(X \times S^n) = H_q(X) \oplus H_q(X \times S^n, X \times \{p\})$$

c) Probar la sucesión relativa de Mayer-Vietoris: Sea (X, Y) par topológico, sean $A, B \subset X$ tales que $\text{int } A \cup \text{int } B = X$ y sean $C \subset A$ y $D \subset B$ tales que $\text{int } D \cup \text{int } C = Y$. Probar que existe una sucesión exacta larga

$$\dots \rightarrow H_q(A \cap B, C \cap D) \rightarrow H_q(A, C) \oplus H_q(B, D) \rightarrow H_q(X, Y) \rightarrow \dots$$

d) Probar, usando el item anterior, que

$$H_q(X \times S^n, X \times \{p\}) = H_{q-1}(X \times S^{n-1}, X \times \{p\})$$

e) Deducir que

$$H_q(X \times S^n, X \times \{p\}) = H_{q-n}(X)$$

y por lo tanto se obtiene el siguiente resultado interesante:

$$H_q(X \times S^n) = H_q(X) \oplus H_{q-n}(X)$$

f) Calcular los grupos de homología de $S^n \times S^m$ y los del toro n -dimensional $(S^1 \times \dots \times S^1)$.

15. Sean $x_1, \dots, x_m$ puntos de $\mathbb{R}^n$. Calcular $H_q(\mathbb{R}^n - \{x_1, \dots, x_m\})$.