Topología Algebraica

Práctica 1

1. Probar que si X es localmente compacto e Y es cualquier espacio, entonces la aplicación
$$ev : Y^X \times X \to Y, \qquad ev(f, x) = f(x)$$
es continua.

2. Sean $X, Y, Z \in \mathrm{Top}$. Se considera la aplicación:
$$\eta : Y^{X\times Z} \to (Y^Z)^X, \qquad H \mapsto (x \mapsto (z \mapsto H(x, z)))$$
Probar:
   (a) η está bien definida, y es inyectiva; si adems X y Z son Hausdorff, es continua.
   (b) Si Z es localmente compacto, η es biyectiva.
   (c) Si X y Z son de Hausdorff y Z es localmente compacto, η es homeomorfismo.

3. Sean $X, Y, Z \in \mathrm{Top}_*$. Probar que hay un homeomorfismo natural $X \wedge (Y \wedge Z) \cong (X \wedge Y) \wedge Z$.

4. Dar un ejemplo de un espacio conexo que no sea arco-conexo.

5. Si G es un grupo topológico, entonces $\pi_0 G$ tiene estructura natural de grupo. Si H es grupo, ¿existe un grupo topológico G tal que $\pi_0 G = H$?

6. Sean $\mathfrak{C}$ una categoría con productos finitos y $G \in \mathfrak{C}$ un objeto. Supongamos que para cada X en $\mathfrak{C}$, $G(X) := \hom_{\mathfrak{C}}(X, G)$ tiene una estructura de monoide tal que $X \mapsto G(X)$ es un funtor de $\mathfrak{C}$ en la categoría Mon de los monoides.
   (a) Probar que existe un morfismo $\mu \in \hom_{\mathfrak{C}}(G \times G \to G)$ tal que si $X \in \mathfrak{C}$ es cualquier objeto, y $\alpha, \beta \in G(X)$, entonces $\alpha \cdot \beta := \mu \circ (\alpha, \beta)$ es la operación del monoide $G(X)$ (decimos que G es un monoide en $\mathfrak{C}$).
   (b) G manda $\mathfrak{C}$ en los monoides asociativos si y sólo si (G, μ) es asociativo.
   (c) Probar que $\mathfrak{C}$ tiene un objeto final.
   (d) Sea $*$ el objeto final de $\mathfrak{C}$. Probar que si G manda $\mathfrak{C}$ en la subcategoría de Mon que consiste de monoides asociativos con elemento unidad y morfismos que preservan tales elementos, entonces existe $e \in \hom_{\mathfrak{C}}(*, G)$ tal que $\mu(e \times 1_G) = \mu(1_G \times e) = 1_G$.
   (e) Suponiendo todo lo anterior, y además que G manda $\mathfrak{C}$ en $\mathfrak{Grp}$, probar que existe $i \in \hom_{\mathfrak{C}}(G, G)$ tal que $\mu(1_G \times i) = \mu(i \times 1_G) = e$ (i.e. G es un grupo en $\mathfrak{C}$).
   (f) En la situación del anteúltimo ítem, sean $p_i : G \times G \to G$ $i = 1, 2$ las dos proyecciones, y supóngase que la aplicación
$$s : G \times G \to G \times G, \qquad p_1 s = p_1, \quad p_2 s = \mu$$
es un isomorfismo. Probar que G es un grupo en $\mathfrak{C}$.

7. El análogo del ejercicio anterior para el caso en que $X \to \hom_{\mathfrak{C}}(G, X)$ sea un funtor a monoides, monoides asociativos, monoides asociativos con unidad, o grupos.