Topología Algebraica

Práctica 2

1. Sean $n \geq 1$ y $f : (D^n, S^{n-1}) \to (X, A) \in \mathrm{Top}^2_*$. Probar que $[f] = 0$ en $\pi_n(X, A)$ si y sólo si existe $g : (D^n, S^{n-1}) \to (X, A)$ tal que $g \underset{relA}{\sim} f$ y $g(D^n) \subset A$.

2. Sea $X \in \mathrm{Top}$. Se considera en $X \times I$ la relación de equivalencia generada por $(x, 0) \sim (y, 0)$, $(x, 1) \sim (y, 1)$ $(x, y \in X)$. La *suspensión no reducida* de X es $\Sigma X = X \times I/\sim$. ¿Existe un funtor $F : \mathrm{Top} \to \mathrm{Top}$ tal que para todo $X, Y \in \mathrm{Top}$

$$\hom_{\mathrm{Top}}(\Sigma X, Y) = \hom_{\mathrm{Top}}(X, FY)?$$

   Si existe, determinar si vale también

$$\hom_{[\mathrm{Top}]}(\Sigma X, Y) = \hom_{[\mathrm{Top}]}(X, FY)$$

3. Mismas preguntas que en el ejercicio anterior para el *cono no reducido* $\Gamma X := X \times I/X \times \{1\}$.

4. Probar que hay homeomorfismos $\Sigma S^n \cong S^{n+1}$, $\Gamma S^n = D^{n+1}$.

5. Sea $f : X \to Y \in \mathrm{Top}$. El *cilindro no reducido* de f, M_f es el resultado de pegar $X \times I$ con Y identificando $(x, 1)$ con $f(x)$ $(x \in X)$. Así, tenemos un diagrama cocartesiano

$$\begin{tikzcd}
X \times I \arrow[r] & M_f \\
X \arrow[u, "- \times 1"] \arrow[r, "f"'] & Y \arrow[u, "j"']
\end{tikzcd}$$

   Probar

   (a) Las aplicaciones j es un homeomorfismo con su imagen. Por esta razón, identificaremos Y con $j(Y)$. Lo mismo pasa con $\iota : X \to M_f$, $\iota(x) = \overline{(x, 0)}$.

   (b) Existe $r : M_f \to Y$ tal que $rj = 1_Y$ y $jr \underset{\mathrm{rel}Y}{\sim} 1_{M_f}$.

   (c) Sean $x_0 \in X$ y $y_0 = f(x_0)$; consideremos a f como una aplicación $(X, x_0) \to (Y, y_0) \in \mathrm{Top}_*$. Probar que P_f y $P(M_f, X)$ son homotópicamente equivalentes.

6. Sea $A \in \mathrm{Top}_*$. Probar que $A\wedge : \mathrm{Top}_* \to \mathrm{Top}_*$, $X \mapsto A \wedge X$ induce un funtor $[\mathrm{Top}_*] \to [\mathrm{Top}_*]$.

7. Sea $X \in \mathrm{Top}$. Dados $x, y \in X$, sea $P(x, y)$ el conjunto de clases de homotopía de caminos de origen x que terminan en y.

   (a) Probar que la composición de caminos satisface los axiomas para la composición de morfismos en una categoría. En otras palabras, hay una categoría $\mathfrak{G}(X)$ cuyos objetos son los elementos de X, y donde si $x, y \in X$, $\hom_{\mathfrak{G}X}(x, y) = P(x, y)$.

   (b) Probar que para cada $n \geq 1$, se tiene un funtor $\mathfrak{G}X \to \mathrm{Grp}$, que manda $x \mapsto \pi_n(X, x)$.

   (c) $\mathfrak{G}X$ es un *grupoide*, i.e. una categoría en la cual todo morfismo es un isomorfismo. ¿Qué es un grupoide con un sólo objeto?

   (d) Probar que si X es arco-conexo y $x_0 \in X$ entonces hay una equivalencia de categorías entre $\mathfrak{G}(X)$ y $\pi_1(X, x_0)$.