Topología Algebraica

Práctica 3

1. Sean $n \geq 1$ y $G_n = \{e^{\frac{2ip\pi}{n}} : 0 \leq p \leq n-1\} \subset S^1$. Probar que S^1/G_n es isomorfo, como grupo topológico, a S^1.
2. (*) Sean $H \subset G$ un subgrupo topológico tal que $G \to G/H$ tenga secciones locales. Probar que la aplicación canónica $\partial : \pi_1(G/H) \to \pi_0(H)$ es morfismo de grupos.
3. Sea $U_n = \{P \in GL_n(\mathbb{C}) : \bar{P}^t P = I\}$. Probar:
   (a) Hay homeomorfismos $U_n/U_{n-k} \cong V_{k,n}(\mathbb{C})$, $(U_n/U_{n-k} \times U_k) \cong G_{k,n}(\mathbb{C})$.
   (b) $U_n \to U_n/U_{n-k}$ y $U_n \to U_n/U_{n-k} \times U_k$ tienen secciones locales.
4. Ejercicio 4.22 del Switzer.
5. Sea $f : (E, e_0) \to (B, b_0)$ un revestimiento con fibra F.
   (a) Probar: $\forall \omega : (S^1, *) \to (B, b_0)$ $\exists \hat{\omega} : (I, 0) \to (E, e_0)$ tal que $p \circ \hat{\omega} = \omega$.
   (b) Probar que el elemento $\hat{\omega}(1) \in F$ es independiente de la elección de $\hat{\omega}$.
   (c) ¿Qué pasa con el ítem anterior si f es fibración pero F no es discreto?
6. Sean X un espacio de Hausdorff y $\mathcal{K} \subset P(X)$ el conjunto de los subconjuntos compactos de X. Decimos que un subconjunto $F \subset X$ es un cerrado de Kelley si $F \cap K$ es cerrado para todo $K \in \mathcal{K}$. Notar que todo cerrado de X es un cerrado de Kelley. Decimos que X es un espacio de Kelley si todo cerrado de Kelley es cerrado. La *kelleyficación* $Ke(X)$ es el conjunto X equipado con la topología cuyos cerrados son los cerrados de Kelley de X.
   (a) Probar que $Ke(X)$ es de Kelley, que la identidad de X define una función continua $\iota : Ke(X) \to X$ y que toda función continua $Y \to X$ con Y de Kelley se factoriza a través de ι.
   (b) Probar que todo CW-complejo es un espacio de Kelley.
   (c) Probar que si X, Y y Z son espacios de Kelley y $f : Z \to X$, $g : Z \to Y$ son continuas entonces existe una única función continua $h : Z \to X \times_{Ke} Y := Ke(X \times Y)$ tal que $p_X \circ h = f$ y $p_Y \circ h = g$.
   (d) Probar que si X y Y son CW-complejos entonces $X \times_{Ke} Y$ es lo mismo que $X \times Y$ con la topología débil.
7. (*) Ejercicios 5.14 y 5.15 del Switzer.
8. Sean (X, A) un CW-complejo relativo y $K \subset X$ un compacto. Probar que el conjunto de las celdas e_i de (X, A) tales que $\mathring{e} \cap K \neq \emptyset$ es finito.
9. Sean K un complejo simplicial finito y $L \subset K$ un subcomplejo. Probar que $|K|$ es un CW-complejo con celdas $|\sigma|$, $\sigma \in \mathcal{F}_K$ y que $|L| \subset |K|$ es un CW-subcomplejo.