Topología Algebraica- 2009
Práctica Adicional 1
Conceptos básicos de homología.

Nota: Esta pequeña práctica adicional está pensada para los que nunca trabajaron con homología y debería/podría ser resuelta conjuntamente con la Práctica Tres ("Homología Simplicial").

Recordar que una sucesión exacta corta es una sucesión exacta de la forma $0 \to M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \to 0$.

1. Sea $0 \to M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \to 0$ una sucesión exacta. Probar que son equivalentes:
   a) f es sección.
   b) g es retracción.
   c) Existe un isomorfismo $\phi : N \to M \oplus P$ tal que $\phi f(m) = (m, 0)$ y $g\phi^{-1}(m, p) = p$.

2. Hallar todos los grupos abelianos posibles M en las siguientes sucesiones exactas:
   a) $0 \to \mathbb{Z}_2 \to M \to \mathbb{Z}_4 \to 0$
   b) $0 \to \mathbb{Z}_m \to M \to \mathbb{Z}_n \to 0$
   c) $0 \to Z_m \to M \to \mathbb{Z}^n \to 0$

3. (Lema de los 5) Dado el siguiente diagrama conmutativo de filas exactas

$$\begin{tikzcd} M_1 \arrow[r] \arrow[d, "a"'] & M_2 \arrow[r] \arrow[d, "b"'] & M_3 \arrow[r] \arrow[d, "c"'] & M_4 \arrow[r] \arrow[d, "d"'] & M_5 \arrow[d, "e"'] \\ N_1 \arrow[r] & N_2 \arrow[r] & N_3 \arrow[r] & N_4 \arrow[r] & N_5 \end{tikzcd}$$

   Probar que
   a) Si b y d son mono y a es epi, entonces c es mono.
   b) Si b y d son epi y e es mono, entonces c es epi.
   c) Concluir que si a, b, d y e son iso, entonces c es iso.

4. Sean (C_*, d) y (D_*, d') complejos. Probar que $(C_* \oplus D_*, d \oplus d')$ es un complejo y que

$$H_*(C \oplus D) = H_*(C) \oplus H_*(D).$$

5. (Lema de la serpiente) Considerar el siguiente diagrama conmutativo de sucesiones exactas cortas

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[r] \arrow[d, "g"'] & C \arrow[r] \arrow[d, "h"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & D \arrow[r] & E \arrow[r] & F \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

   Probar que se tiene una sucesión exacta

$$0 \to \ker f \to \ker g \to \ker h \xrightarrow{\partial} \operatorname{coker} f \to \operatorname{coker} g \to \operatorname{coker} h \to 0$$

6. Siguiendo los lineamientos básicos que se darán en clase (y utilizando el item anterior) probar que toda sucesión exacta corta de complejos de cadenas

$$0 \to C_* \to D_* \to E_* \to 0$$

   induce una sucesión exacta "larga" de homología:

$$\ldots \to H_n(C_*) \to H_n(D_*) \to H_n(E_*) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(C_*) \to H_{n-1}(D_*) \to \ldots$$