Topología Algebraica- 2009

Práctica Cero

Repaso de algunos conceptos de topología.

Nota: Esta práctica puede comenzar a hacerse antes de empezar la materia. Algunos conceptos, por ejemplo: espacios de adjunción, serán explicados en clase para los que no lo vieron en topología.

1. Sea $A \subseteq X$. Probar que toda retracción $r : X \to A$ es cociente.

2. Sea $q : X \to Y$ cociente y sea Z localmente compacto y Hausdorff. Probar que $q \times 1 : X \times Z \to Y \times Z$ es cociente, donde $1 : Z \to Z$ denota la función identidad.
   (Sugerencia: usar ley exponencial, caracterización de topologías finales y NO darle bolilla al Munkres).

3. Usando ejercicio anterior, probar que si $p : A \to B$ y $q : C \to D$ son cocientes y B y C son localmente compactos y Hausdorff, entonces $p \times q : A \times C \to B \times D$ es cociente.

4. Sean X y Z espacios contráctiles. Probar que tienen el mismo tipo homotópico y que cualquier función continua entre ellos es una equivalencia homotópica.

5. Sea $A \subset X$ subespacio y supongamos existe una función continua $H : X \times I \to X$ tal que
   a) $H(x, 0) = x \ \forall x \in X$
   b) $H(A \times I) \subset A$
   c) $H(a, 1) = a_0 \forall a \in A$
   Probar que la función cociente $q : X \to X/A$ es una equivalencia homotópica.

6. Probar el siguiente teorema que se enunciará en clase: Sea $A \subseteq X$ cerrado y $f : A \to B$ continua. Si se cumplen las siguientes condiciones:
   a) B y X son Hausdorff.
   b) Para todo $x \in X - A$ existe un entorno cerrado V_x de x en X tal que $V_x \cap A = \emptyset$.
   c) $A \subseteq X$ es retracto de entorno.
   Entonces el espacio de adjunción $B \cup_f X$ es Hausdorff. En particular, toda adjunción de celdas transforma espacios Hausdorff en Hausdorff.

7. Sea $A \subseteq X$ cerrado y $f : A \to B$ continua. Probar que, si A es no vacío y X y B son conexos (resp. arcoconexos) entonces el espacio de adjunción $B \cup_f X$ es conexo (resp. arcoconexo).

8. Sean (X, x) e (Y, y) espacios punteados. Del hecho que $\pi_1(X \times Y, (x, y)) = \pi_1(X, x) \times \pi_1(Y, y)$ se deduce que todo lazo en $X \times \{y\}$ conmuta en $\pi_1(X \times Y, (x, y))$ con todo lazo en $\{x\} \times Y$. Probar esto encontrando una homotopía explícita.