Topología Algebraica- 2009
Práctica Cinco
Homología con coeficientes - Cohomología - Fórmula de Künneth - Modelos acíclicos-

1. Probar que $\mathrm{Tor}(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ es isomorfo al subgrupo de torsión de A. Deducir que A no tiene torsión si y sólo si $\mathrm{Tor}(A, B) = 0$ para todo B.

2. Probar que $\mathrm{Tor}(A, B)$ es grupo de torsión. Además, $\mathrm{Tor}(A, B)$ tiene elementos de orden n si y sólo si A y B tienen elementos de orden n.

3. Probar que si $\tilde{H}^n(X, \mathbb{Q})$ y $\tilde{H}^n(X, \mathbb{Z}_p)$ son cero para todo n y todo primo p, entonces $\tilde{H}_n(X) = 0$ para todo n y por lo tanto $\tilde{H}^n(X; G) = 0$ para todo n y todo grupo abeliano G.

4. Sea (C_*, d) complejo de cadenas tales que C_n es libre y $H_n(C_*)$ es finitamente generado para todo n. Probar que $H_q(X, \mathbb{Z}_m) \simeq H^q(X, \mathbb{Z}_m)$ (aunque los isomorfismos no son naturales).

5. Probar que si B es divisible entonces $\mathrm{Ext}(A, B) = 0$.

6. Sea $0 \to A \to B \to C \to 0$ una sucesión exacta corta de grupos abelianos y G grupo abeliano. Probar que se tienen sucesiones exactas:

$$0 \to \mathrm{Hom}(C, G) \to \mathrm{Hom}(B, G) \to \mathrm{Hom}(A, G) \to \mathrm{Ext}(C, G) \to \mathrm{Ext}(B, G) \to \mathrm{Ext}(A, G) \to 0$$
$$0 \to \mathrm{Hom}(G, A) \to \mathrm{Hom}(G, B) \to \mathrm{Hom}(G, C) \to \mathrm{Ext}(G, A) \to \mathrm{Ext}(G, B) \to \mathrm{Ext}(G, C) \to 0$$

7. Sean X, Y espacios topológicos. Probar que existe un isomorfismo no natural
$$H_m(X \times Y) \simeq \bigoplus_{p+q=m} H_p(X; H_q(Y))$$

8. Calcular la homología de $S^1 \times S^1 \times S^3$.

9. Sea K un complejo simplicial. Un n-simplex ordenado de K es una $(n+1)$-upla $(v_0, \ldots, v_n)$ de vértices de algún simplex de K (los vértices no necesariamente distintos). Se define el complejo de cadenas ordenado de K como el complejo $(\Delta(K), d)$ que en grado n es el grupo abeliano libre generado por los n-símplices ordenados y el morfismo de borde es el usual: $d(v_0, \ldots, v_n) = \sum(-1)^i(v_0, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_n)$.
   Sea $C(K)$ el complejo de cadenas usual de K (de símplices orientados) y sea $\mu : \Delta(K) \to C(K)$ el morfismo $\mu(v_0 \ldots, v_n) = [v_0, \ldots, v_n]$ si los vértices son distintos y $\mu(v_0 \ldots, v_n) = 0$ si no lo son. Probar, usando el teorema de modelos acíclicos aplicado a la categoría $\mathcal{C}(K)$ de subcomplejos de K ordenados por inclusión, que μ es una equivalencia homotópica de complejos y por lo tanto ambos complejos tienen la misma homología.