Topología Algebraica- 2009
Práctica Cuatro
Homología Singular y Aplicaciones

1. *a*) Sea $A \subseteq X$ subespacio. Probar que $H_0(X, A) = 0$ si y sólo si toda componente arcoconexa de X interseca a A.
   b) Probar que $H_1(X, A) = 0$ si y sólo si $H_1(A) \to H_1(X)$ es epi y toda componente arcoconexa de X contiene a lo sumo una componente arcoconexa de A.

2. Calcular $H_n(X, A)$ para $X = S^2$ y A un conjunto finito de puntos.

3. *a*) Sea $A \subset X$ retracto (es decir, existe $r : X \to A$ continua tal que $ri = 1_A$). Probar que $H_q(X) = H_q(A) \oplus H_q(X, A)$.
   b) Sea X espacio topológico y sea $p \in S^n$. Deducir del item anterior que
   $$H_q(X \times S^n) = H_q(X) \oplus H_q(X \times S^n, X \times \{p\})$$
   c) Probar la sucesión relativa de Mayer-Vietoris: Sea (X, Y) par topológico, sean $A, B \subset X$ tales que $int\ A \cup int\ B = X$ y sean $C \subset A$ y $D \subset B$ tales que $int\ D \cup int\ C = Y$. Probar que existe una sucesión exacta larga
   $$\ldots \to H_q(A \cap B, C \cap D) \to H_q(A, C) \oplus H_q(B, D) \to H_q(X, Y) \to \ldots$$
   d) Probar, usando el item anterior, que
   $$H_q(X \times S^n, X \times \{p\}) = H_{q-1}(X \times S^{n-1}, X \times \{p\})$$
   e) Deducir que
   $$H_q(X \times S^n, X \times \{p\}) = H_{q-n}(X)$$
   y por lo tanto se obtiene el siguiente resultado interesante:
   $$H_q(X \times S^n) = H_q(X) \oplus H_{q-n}(X)$$
   f) Calcular los grupos de homología de $S^n \times S^m$ y los del toro n-dimensional($S^1 \times \ldots \times S^1$).

4. Sean $x_1, \ldots, x_m$ puntos de $\mathbb{R}^n$. Calcular $H_q(\mathbb{R}^n - \{x_1, \ldots, x_m\})$.

5. Calcular $H_q(S^n - X)$ para X un subespacio homeomorfo a $S^k \coprod S^l$.

6. Idem ejercicio anterior pero para X homeomorfo a $S^k \bigvee S^l$.

7. Probar que $\tilde{H}_q(S^n - X) = \tilde{H}_{n-q-1}(X)$ si $X \subset S^n$ es homeomorfo a un grafo finito conexo.

8. Sea $(D, S) \subset (D^n, S^{n-1})$ tal que (D, S) es homeomorfo a (D^k, S^{k-1}) y $D \cap S^{n-1} = S$. Probar que la inclusión $i : S^{n-1} - S \to D^n - D$ induce isomorfismos en la homología.

9. Sean M y N variedades topológicas de la misma dimensión (es decir, ambas son Hausdorff y localmente homeomorfas a $\mathbb{R}^n$). Probar que, si M es compacta y N conexa, entonces toda función inyectiva y continua $h : M \to N$ es un homeomorfismo.

10. Sea σ un simplex de un complejo simplicial K y sean x e y puntos en el interior de σ. Probar que los grupos de homología local de $|K|$ en x y en y son isomorfos.

11. Recordar que una triangulación de un espacio topológico X por un complejo simplicial K es un homeomorfismo $h : |K| \to X$. Sea M una variedad topológica con borde ∂M. Supongamos que M admite una triangulación $h : |K| \to M$. Probar que $h^{-1}(\partial M) = |L|$ para algún subcomplejo $L < K$. (Sugerencia: ejercicio anterior).

12. Sea v un vértice de un complejo simplicial K. Proba que
$$H_q(|K|, |K| - v) = H_q(st(v), lk(v))$$
donde $st(v)$ es el star (cerrado) de v y $lk(v)$ el link.

13. Sea K complejo simplicial de dimensión n y sea $X = |K|$. Probar que para $q > n$, los grupos de homología local $H_q(X, X - x)$ son triviales y para $p = n$ existe al menos un grupo $H_n(X, X - x)$ que no es nulo.