Topología Algebraica- 2009
Práctica Dos
Complejos Simpliciales.

1. Probar que en $\mathbb{R}^n$ (con $n \geq 1$ fijo), podemos encontrar subconjuntos S de cardinal m en posición general, para todo $m \in \mathbb{N}$.

2. Sabemos que todo n-simplex s puede ser identificado mediante un isomorfismo lineal con un n-simplex en $\mathbb{R}^{n+1}$. Cuáles deberían ser los vértices elegidos en $\mathbb{R}^{n+1}$ para que las coordenadas baricéntricas de los puntos de s coincidan con las coordenadas de los puntos correspondientes en $\mathbb{R}^{n+1}$?

3. Probar que todo complejo simplicial finito K de dimensión n se puede meter como subespacio de $\mathbb{R}^{2n+1}$.

4. Sean $p_1, \dots, p_r$ puntos de un simplex s y sean $w_1, \dots, w_r \in \mathbb{R}$ tal que $w_i > 0$ y $\sum w_i p_i = v$ es vértice de s. Probar que $p_i = v$ para todo i. Deducir que los vértices de cualquier simplex s quedan unívocamente determinados por s.

5. Sea K un subcomplejo de un simplex s y sean $p_1, \dots, p_n \in |K|$. Probar que si $p = \sum w_i p_i \in |K|$ con $\sum w_i = 1$ y $w_i > 0$ para todo i, entonces los puntos $p_1, \dots, p_n$ están en un simplex de K.

6. Probar que K es finito si y sólo si $|K|$ es compacto.

7. Probar que si K es finito, la topología de $|K|$ coincide con la topología métrica $|K|_d$.

8. Probar que una función $H : |K| \times I \to X$ es continua si y solo si las restricciones a los símplices $H : s \times I \to X$ son continuas.

9. Probar que si $L < K$ entonces $|L|$ es subespacio cerrado de $|K|$.

10. Verificar que los morfismos simpliciales $f : K \to L$ inducen funciones continuas $|f| : |K| \to |L|$.

11. Dar algún ejemplo de un morfismo simplicial que sea biyectivo en vértices pero que no sea isomorfismo simplicial.

12. Cuándo es el interior $\overset{\circ}{s}$ de un simplex $s \in K$, abierto en $|K|$?

13. Exhibir distintas triangulaciones de esferas, discos, la recta real, un intervalo abierto real y el plano proyectivo.

14. Sean $v_o, \dots, v_n$ vértices de un complejo simplicial K. Probar que la intersección de sus stars abiertos es no vacía si y sólo si $v_o, \dots, v_n$ forman un simplex de K.

15. Sea $s \in K$. Probar que $St(s, K) = s\ lk(s, K)$. Probar además que

$$\dot{s}\ lk(s, K) = St(s, K) - \{s', \overset{\circ}{s'} \subset \overset{\circ}{S}t(s, K)\}$$

.

16. Probar que las subdivisiones derivadas son estelares.

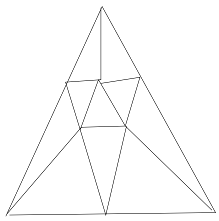
17. Probar que si L es una subdivisión de K, entonces todo vértice de K es vértice de L.

18. Sea $L < K$. Probar que toda subdivisión de K induce naturalmente una subdivisión en L.

19. Sea $L < K$ con K finito. Probar que toda subdivisión en L se puede extender a una subdivisión en K.

20. Sea K' una subdivisión de K. Probar que para cada vértice w de K' existe un vértice v de K tal que $\overset{\circ}{St}(w, K') \subseteq \overset{\circ}{St}(v, K)$.

21. Probar que la siguiente subdivisión del 2-simplex no es isomorfa a ninguna subdivisión estelar del mismo.



22. Sea $L < K$ y sean L' y K' sus subdivisiones baricéntricas. Probar que $L' < K'$ es subcomplejo pleno.

23. Sea $L < K$. Probar que existe un abierto $U \subset |K|$ tal que $|L| \subset U$ es un retracto por deformación fuerte.

24. Sea X un espacio topológico y $\mathcal{U} = \{U_i\}$ un cubrimiento abierto de X. El *nervio* de $\mathcal{U}$ es el complejo simplicial $N(\mathcal{U})$ cuyos vértices son los abiertos del cubrimiento y los símplices son los subconjuntos finitos no vacíos de $\mathcal{U}$, $s = \{U_{i_0}, \ldots, U_{i_n}\}$ tales que $\bigcap U_{ik} \neq \emptyset$.
    - *a*) Probar que efectivamente $N(\mathcal{U})$ es un complejo simplicial.
    - *b*) Sea K complejo simplicial y sea $\mathcal{U} = \{\overset{\circ}{St}\ v | v \in K\}$ el cubrimiento de $|K|$ por los stars abiertos de vértices. Probar que la función que le asigna a cada vértice v de K el abierto $\overset{\circ}{St}\ v$ de $|K|$ induce un isomorfismo simplicial $K = N(\mathcal{U})$.

25. Se dice que un espacio topológico X tiene dimensión $\leq n$ si todo cubrimiento abierto de X admite un refinamiento abierto cuyo nervio es un complejo simplicial de dimensión $\leq n$. Decimos que $dim\ X = n$ si $dim\ X \leq n$ y $dim\ X \nleq n$. Probar que:
    - *a*) Si $A \subseteq X$ es cerrado entonces $dim\ A \leq dim\ X$.
    - *b*) Los espacios discretos tienen dimensión 0.
    - *c*) El intervalo I tiene dimensión 1.
    - *d*) Si K complejo simplicial finito y $dim\ K = n$ entonces $dim\ |K| \leq n$. (En realidad vale la igualdad, se verá más adelante).