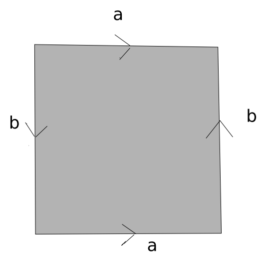
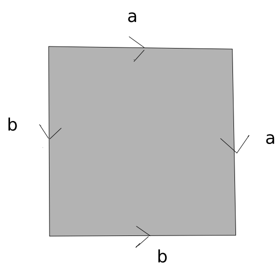
Topología Algebraica- 2009
Práctica Tres
Homología simplicial.

Nota: Para los que nunca trabajaron con homología, esta práctica debería/podría ser resuelta conjuntamente con la Práctica Adicional 1 ("Conceptos básicos de homología").

1. Triangular apropiadamente la botella de Klein, que es el espacio que se obtiene de un rectángulo identificando los lados como muestra la siguiente figura y calcular su homología. (Sugerencia: seguir los pasos que se utilizaron en clase para el cálculo de la homología del toro y del plano proyectivo).



2. Idem para la suma conexa de dos planos proyectivos, que es el espacio que se obtiene de un rectángulo identificando los lados como muestra la figura.



Comparar con lo obtenido en el ejercicio anterior y explicar.

3. Calcular, mediante una triangulación apropiada, la homología de la cinta de Möbius.

4. Sea L un subcomplejo de un complejo simplicial K.

   a) Probar que la inclusión de L en K induce una inclusión de complejos de cadenas $i : C_*(L) \to C_*(K)$ y que, mediante esta inclusión, se tiene un complejo de cadenas cociente $C_*(K, L) := C_*(K)/C_*(L)$. La homología del complejo $C_*(K, L)$ se denomina *homología relativa del par* (K, L) y se denota $H_*(K, L)$.

   b) Probar que se tiene una sucesión exacta corta de complejos de cadenas
   $$0 \to C_*(L) \to C_*(K) \to C_*(K, L) \to 0$$
   y esto induce, por lo tanto, una sucesión exacta larga en las homologías
   $$\ldots \to H_n(L) \to H_n(K) \to H_n(K, L) \to H_{n-1}(L) \to \ldots$$

5. Sea σ un n-simplex (visto como complejo simplicial). Calcular $H_*(\sigma, \dot{\sigma})$.

6. Sea v un vértice de un complejo simplicial K. Calcular $H_*(K, v)$.

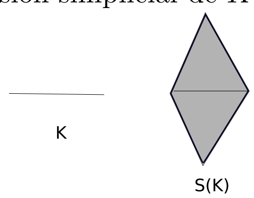
7. Sea L subcomplejo de K. Caracterizar $H_0(K, L)$.

8. *(Sucesión de Mayer-Vietoris para homología simplicial)* Sea K complejo simplicial y sean L, M subcomplejos de K tales que $K = L \cup M$. Probar que se tiene una sucesión exacta de complejos de cadenas
$$0 \to C_*(L \cap M) \to^{\phi} C_*(L) \oplus C_*(M) \to^{\psi} C_*(K) \to 0$$
con $\phi(c) = (j_1(c), -j_2(c))$, $\psi(c', c'') = j_3(c') + j_4(c'')$, donde los morfismos j_k son los inducidos por las inclusiones $L \cap M < L, M < K$.

   Concluir que se tiene una sucesión exacta larga:
$$\ldots \to H_n(L \cap M) \to H_n(L) \oplus H_n(M) \to H_n(K) \to H_{n-1}(L \cap M) \to \ldots$$

9. Siguiendo los pasos del ejercicio anterior, enunciar y probar el teorema análogo para homología reducida (para el caso que $L \cap M \neq \emptyset$).

10. Sea S^0 el borde del 1-simplex (es decir, S^0 son dos vértices aislados). Dado un complejo simplicial K, se define la suspensión simplicial de K como el join $S(K) = S^0 K$.



   Usar Mayer-Vietoris para probar que $\tilde{H}_n(S(K)) = \tilde{H}_{n-1}(K)$ para todo n. Utilizar esta fórmula para dar una demostración alternativa (con una triangulación alternativa) del cálculo de la homología de las esferas.