Topología Algebraica- 2009
Práctica Uno
Grafos, Van Kampen y aplicaciones.

Grafos.

Un grafo es un espacio topológico que se arma a partir de un conjunto discreto de puntos (llamados vértices), pegando (adjuntando) copias del intervalo unitario real I (que formarán las aristas del grafo). Los dos puntos del borde de cada intervalo que se adjunta pueden estar pegados a distintos vértices o eventualmente al mismo. Con esta definición permitimos aristas múltiples entre vértices y también se permiten lazos. Concretamente, un grafo es un CW-complejo de dimensión uno. La definición formal es la siguiente:

Notamos con $S^0 = \{0, 1\}$ al borde del intervalo unitario $I = [0, 1]$.

Definición. Un grafo X us un espacio que se obtiene de un conjunto (espacio discreto) X^0 de puntos, llamados vértices y de un conjunto J de funciones $j : S^0 \to X^0$, tomando el espacio cociente de la unión disjunta $X^0 \cup (J \times I)$ identificando los puntos $(j, 0)$ con $j(0)$ y los puntos $(j, 1)$ con $j(1)$. Las imágenes de los intervalos $\{j\} \times I$ se llaman aristas.

Un grafo se dice finito si tiene finitos vértices y aristas. Un grafo es localmente finito si cada vértice es borde de una cantidad finita de aristas.

Ejercicio Uno. Probar que un grafo es finito si y sólo si es compacto y es localmente finito si y sólo si es localmente compacto.

Ejercicio Dos. Probar que los grafos son localmente contráctiles (es decir: dado cualquier punto y cualquier entorno del punto, existe un entorno contráctil del punto contenido en el entorno inicial).

Observar que, como los grafos son localmente contráctiles, entonces admiten revestimiento universal.

Una arista orientada $k : I \to X$ en un grafo X es el recorrido de una arista de X en una dirección (del 0 al 1) o en la otra (del 1 al 0). Un camino de aristas es una composición finita de aristas orientadas $k_1 \dots k_n$ tales que $k_{i+1}(0) = k_i(1)$. El camino se dice reducido si k_{i+1} no es k_i en la dirección contraria (para ningún i). El camino se dice cerrado si empieza y termina en el mismo vértice.

Definición. Un árbol es un grafo conexo que no tiene caminos cerrados reducidos.

Antes de plantear el próximo ejercicio, recordemos que un subespacio $A \subset Y$ es un retracto por deformación fuerte si existe una función continua $r : Y \to A$ (llamada retracción) tal que $ri = 1_A$ e $ir \simeq 1_Y$ rel A (donde i denota la inclusión de A en Y).

Ejercicio Tres. Probar que cualquier vértice v de un árbol T es un retracto por deformación fuerte de T. (Sugerencia: Para el caso finito se puede hacer por inducción en la cantidad de aristas. Para el caso infinito, usar que todo vértice w está contenido en un subárbol finito T_w que contiene también al vértice inicial v).

Un subgrafo A de un grafo X es un grafo tal que $A \subset X$ y $A^0 \subset X^0$ (es decir, A es unión de algunos de los vértices y algunas de las aristas de X). Un subárbol del un grafo X se dice maximal si no está contenido estrictamente en otro subárbol de X.

Ejercicio Cuatro. Probar que todo árbol T que es un subgrafo de un grafo X está contenido en un subárbol maximal. Además, si el grafo X es conexo, entonces un árbol en X es maximal si y sólo si contiene a todos los vértices de X.

Ejercicio Cinco. Sea X un grafo conexo con árbol maximal T. Probar que el espacio cociente X/T es la unión en un punto de tantas copias de esferas unidimensionales S^1 como aristas de X que no están en T.

Ejercicio Seis. Sea X un grafo conexo con árbol maximal T. Probar que la función cociente $q : X \to X/T$ es una equivalencia homotópica.

En definitiva: Como corolario de los dos últimos ejercicios, se ve que los grafos conexos tienen el tipo homotópico de una unión de esferas unidimensionales (tantas como aristas de X que no estén en un árbol maximal). En particular, por Van Kampen, el grupo fundamental de un grafo conexo es el grupo libre con tantos generadores como aristas de X que no pertenezcan a un árbol maximal.

La característica de Euler $\chi(X)$ de un grafo finito X se define como

$$\chi(X) = V - E$$

donde V es la cantidad de vértices y E la cantidad de aristas del grafo.

Ejercicio Siete. Probar que la característica de Euler de los árboles vale 1. (Sugerencia: inducción en cantidad de aristas).

Ejercicio Ocho. Utilizando los resultados anteriores, probar que el grupo fundamental de un grafo conexo finito es el grupo libre en $1 - \chi(X)$ generadores. En particular, $\chi(X) \leq 1$ y vale la igualdad si y sólo si X es un árbol.

Ahora nos ocuparemos de los revestimientos de los grafos (que son importantes para deducir algunos resultados sobre grupos, que veremos después). Utilizando las propiedades de levantamiento de los revestimientos, probar el siguiente teorema:

Ejercicio Nueve. Sea B un grafo conexo con conjunto de vértices B^0 y sea $p : E \to B$ un revestimiento. Entoces E es un grafo conexo con conjunto de vértices $E^0 = p^{-1}(B^0)$ y con una arista por cada arista j de B y cada punto e en la fibra de $j(0)$. Además, si B es grafo finito y las fibras de $p : E \to B$ tienen cardinal finito n, entoces E resulta grafo finito y $\chi(E) = n\chi(B)$.

Si G es un grupo libre, podemos encontrar un grafo X cuyo grupo fundamental sea isomorfo a G: simplemente bastará tomar una unión en un punto de tantas copias de esferas unidimensionales como generadores tenga el grupo (por corolario de Van Kampen). Dado un subgrupo H del grupo libre G, por el teorema de existencia y clasificación de revestimientos, existe un revestimiento $p : E \to X$ tal que $p_*(\pi_1(E, e)) = H$, pero, por otro lado, hemos visto que los revestimientos de grafos son grafos y que los grupos fundamentales de grafos son grupos libres. Esto sirve como sugerencia para probar el siguiente ejercicio (Teorema):

Ejercicio Diez. Todo subgrupo H de un grupo libre G es un grupo libre. Además, si G es libre con k generadores y H tiene índice finito n en G, entonces H es libre con $1 - n + nk$ generadores.

Aplicaciones de Van Kampen.

Ejercicio Once. Sea $X \subset \mathbb{R}^n$ una unión de espacios convexos $X_1, \ldots, X_m$ tales que $X_i \cap X_j \cap X_k \neq \emptyset$ para todo i, j, k. Probar que X es simplemente conexo.

Ejercicio Doce. Sea $n \geq 3$ y sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto finito. Probar que $\mathbb{R}^n - A$ es simplemente conexo.

Ejercicio Trece.Sea $X \subset \mathbb{R}^3$ una unión de n rectas por el origen. Calcular $\pi_1(\mathbb{R}^3 - X)$.

Ejercicio Catorce.Sea $n \geq 3$. Supongamos que Y se obtiene de X adjuntándole n-celdas. Probar que la inclusión $i : X \to Y$ induce un isomorfismo en el π_1.

Ejercicio Quince.Usar el ejercicio anterior para probar que, si $n \geq 3$, el complemento de un subespacio discreto de $\mathbb{R}^n$ es simplemente conexo.

Ejercicio Dieciseis. Calcular el grupo fundamental del plano proyectivo (que se obtiene del disco D^2 identificando los puntos $x \in \partial D^2$ con sus antípodas).

Ejercicio Diecisiete. Probar que para todo grupo G existe un complejo celular de dimensión 2 (es decir un espacio que se obtiene de un grafo adjuntándole 2-celdas) cuyo grupo fundamental es isomorfo a G.