Topología Algebraica- 2009
Notas - Ejercicio Guiado
Poliedros asociados a relaciones.

El objetivo de estas notas/ejercicio guiado es probar un resultado de C.H. Dowker sobre complejos simpliciales asociados a relaciones.

Sean X e Y conjuntos y R una relación entre ellos, es decir un subconjunto $R \subseteq X \times Y$. Dados $x \in X$ e $y \in Y$, denotaremos xRy si $(x, y) \in R$.

A partir de una relación R construimos dos complejos simpliciales K y L de la siguiente forma. El complejo K tiene como vértices a los elementos de X y sus n-símplices son los subconjuntos $\{x_0, \dots, x_n\}$ tales que existe un $y \in Y$ con $x_i R y$ para todo $i = 0, \dots, n$. El complejo L se construye análogamente, tomando como símplices a los subconjuntos finitos $\{y_0, \dots, y_n\}$ de Y tales que existe un $x \in X$ con $x R y_j$ para todo j.

El resultado principal de estas notas dice que los poliedros $|K|$ y $|L|$ son homotópicamente equivalentes (en particular tienen la misma homología).

Para empezar, recordemos que la subdivisión baricéntrica de un complejo T, que denotaremos T' puede ser caracterizada combinatoriamente como el complejo simplicial cuyos vértices son los símplices de T y los símplices son los conjuntos ordenados de símplices de T, $(s_0, \dots, s_n)$ tales que s_i es cara de s_{i+1} para todo i.

Notar que todo morfismo $f : T \to M$ entre complejos simpliciales induce canónicamente un morfismo $f' : T' \to M'$ entre sus subdivisiones baricéntricas.

Ordenamos totalmente los vértices de T y definimos un morfismo simplicial

$$\Phi_T : T' \to T$$

asignándole a cada vértice s de T' el mínimo vértice de T contenido en s.

Ejercicio 1. *Probar que Φ_T es efectivamente un morfismo simplicial.*

Notar que la definición de Φ_T depende del orden elegido para los vértices. Si cambiamos el orden obtendremos claramente otro morfismo, pero ambos serán contiguos. Más generalmente, se tiene el siguiente resultado:

Ejercicio 2. *Sea $f : T \to M$ un morfismo simplicial y sean T', M' las subdivisiones baricéntricas. Sea $f' : T' \to M'$ el morfismo simplicial inducido en las subdivisiones. Ordenamos los vértices de T y M y definimos los morfismos simpliciales*

$$\Phi_T : T' \to T, \ \Phi_M : M' \to M$$

como antes. Probar que $\Phi_M f'$ es contigua a $f \Phi_T$.

Volvamos ahora a la relación $R \subset X \times Y$ y a los complejos K, L inducidos por esta relación. Definimos un morfismo simplicial $\Gamma : K' \to L$ de la siguiente manera. Sea s vértice de K', es decir un simplex de K. Por definición, $s = \{x_0, \dots, x_n\}$ y existe $y \in Y$ tal que $x_i R y$. Definimos $\Gamma(s) = y$.

Claramente, Γ depende del orden elegido y del y elegido. No es evidente tampoco que el morfismo sea simplicial. Esto vale y, además la clase de contigüidad no depende de las elecciones:

Ejercicio 3. *Probar que Γ es morfismo simplicial.*

Ejercicio 4. *Probar que la clase de contigüidad de Γ es independiente del orden y de los y elegidos.*

Por supuesto, intercambiando los roles de K y L obtenemos una definición análoga para un morfismo $\Psi : L' \to K$.

Tomando subdivisiones baricéntricas, los morfismos Γ y Ψ determinan los morfismos

$$\Gamma' : K'' \to L' \text{ y } \Psi' : L'' \to K'$$

Consideremos ahora las composiciones $\Psi\Gamma'$ y $\Phi_K\Phi'_K : K'' \to K$ y análogamente, las composiciones $\Gamma\Psi'$, $\Phi_L\Phi'_L : L'' \to L$.

Ejercicio 5. *Probar que $\Psi\Gamma'$ y $\Phi_K\Phi'_K : K'' \to K$ son contiguas (análogamente con $\Gamma\Psi'$, $\Phi_L\Phi'_L : L'' \to L$). Deducir de esto el teorema principal: $|K|$ y $|L|$ son homotópicamente equivalentes.*

Observación 1. Si X es un conjunto y $\mathcal{U}$ un cubrimiento por subconjuntos de X. Definimos la relación $R \subset X \times \mathcal{U}$ mediante xRU si $x \in U$. En este caso, el complejo K se denota $V(\mathcal{U})$ y se llama el complejo de Vietoris del cubrimiento. El complejo L se denota en este caso particular como $N(\mathcal{U})$ y se lo llama Nervio del cubrimiento. Del resultado principal de estas notas, se deduce que $|V(\mathcal{U})|$ y $|N(\mathcal{U})|$ son homotópicamente equivalentes.

Dado un complejo simplicial K de dimensión finita, se define su nervio $N(K)$ como el complejo simplicial cuyos vértices son los símplices maximales de K y los símplices son los conjuntos finitos de símplices maximales $\{s_0, \ldots, s_n\}$ tales que su intersección es no vacía.

Ejercicio 6. *Probar, usando el resultado principal, que $|K|$ y $|N(K)|$ son homotópicamente equivalentes.*