Topología Algebraica- 2009
Notas - Ejercicio Guiado
Relación entre la homología simplicial y singular.

El objetivo de estas notas/ejercicio guiado es probar que la homología (simplicial) de un complejo simplicial K coincide con la homología (singular) de su polítopo $|K|$. En particular se tendrá que la homología simplicial es invariante topológico de los poliedros (es decir, depende de la topología del poliedro y no de la combinatoria de su triangulación): concretamente, dos complejos simpliciales que triangulen el mismo espacio (o espacios homotópicamente equivalentes) tienen la misma homología simplicial.

Para probar esto usaremos varios resultados que ya se han visto, principalmente nos apoyaremos en las sucesiones de Mayer-Vietoris para homología simplicial y para homología singular y en el lema de los 5. Estas herramientas nos permitirán pasar de lo local a lo global y la idea es la siguiente: el núcleo de la demostración será probar el resultado para complejos simpliciales finitos y en ese caso, mediante inducción en cantidad de símplices del complejo simplicial, usaremos Mayer-Vietoris para separar el complejo en dos subcomplejos propios y pegar los isomorfismos en homología de cada uno de esos subcomplejos (que se tendrán por inducción) para obtener el isomorfismo global. Hay varias demostraciones alternativas de este resultado, en varios libros (por ejemplo el de Munkres o el de Hatcher) usan homología relativa y escisión, pero las herramientas e ideas son similares.

Recordemos primero la sucesión de Mayer-Vietoris para complejos simpliciales (ver práctica 3): Sea K complejo simplicial y sean L, M subcomplejos de K tales que $K = L \cup M$. Se tiene entonces una sucesión exacta de complejos de cadenas

$$0 \to C_*(L \cap M) \to^{\phi} C_*(L) \oplus C_*(M) \to^{\psi} C_*(K) \to 0$$

inducido por las inclusiones $L \cap M < L, M < K$. Esto induce una sucesión exacta larga:

$$\ldots \to H_n(L \cap M) \to H_n(L) \oplus H_n(M) \to H_n(K) \to H_{n-1}(L \cap M) \to \ldots$$

La sucesión de Mayer-Vietoris para homología singular de espacios topológicos es similar. Recordemos que en ese caso se tiene un espacio X y dos subespacios A, B cuyos interiores cubren X.

Pero nosotros vamos a necesitar relacionar ambas sucesiones largas de homología. Para eso necesitaremos el siguiente resultado:

Ejercicio 1. *Supongamos que tenemos un diagrama conmutativo*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle g} & & \downarrow{\scriptstyle h} & & \\ 0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

donde las filas son sucesiones exactas de complejos de cadenas y los morfismos verticales son morfismos de complejos. Entonces el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots & \longrightarrow & H_n(A) & \longrightarrow & H_n(B) & \longrightarrow & H_n(C) & \xrightarrow{\partial} & H_{n-1}(A) & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow{\scriptstyle f_*} & & \downarrow{\scriptstyle g_*} & & \downarrow{\scriptstyle h_*} & & \downarrow{\scriptstyle f_*} & & \\ \cdots & \longrightarrow & H_n(A') & \longrightarrow & H_n(B') & \longrightarrow & H_n(C') & \xrightarrow{\partial} & H_{n-1}(A') & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

Comencemos entonces a definir el morfismo que inducirá un isomorfismo entre la homología simplicial y la singular de un complejo simplicial K. Ese morfismo lo definiremos a nivel complejos de cadenas. Para eso, dado un complejo simplicial K, ordenamos totalmente los vértices de K, ese orden total de los vértices lo utilizamos también para inducir las orientaciones en los símplices de K. Recordemos que los símplices estándar Δ^n ya los tomamos (para la definición de homología singular) con sus vértices totalmente ordenados: $\Delta^n = [v_o \dots v_n]$ con $v_0 < v_1 < \dots < v_n$.

Definimos un morfismo de complejos de cadenas $\varphi : C_*(K) \to S_*(|K|)$ del complejo de cadenas simplicial de K al complejo singular de $|K|$ de la siguiente manera: para cada n-simplex orientado $\sigma = [w_0 \dots w_n]$ de K le asignamos la función lineal $\overline{\sigma} : \Delta^n \to |K|$ que manda cada vértice v_i de Δ^n en el correspondiente vértice w_i de $|K|$ si $w_0 < w_1 < \dots < w_n$ Notar que este morfismo depende del orden total fijo inicial elegido para los vértices de K.

Ejercicio 2. *Probar que este morfismo está bien definido y que resulta un morfismo de complejos de cadenas.*

Para demostrar el resultado principal de estas notas para el caso finito, utilizaremos inducción en la cantidad de símplices de K, para probar el paso inductivo tomaremos un simplex maximal σ de K y veremos a K como la unión de dos subcomplejos: σ (visto ahora como subcomplejo de K) y $L = K - \sigma$ (que resulta subcomplejo porque σ es maximal), por hipótesis inductiva y utilizando Mayer-Vietoris saldrá el resultado. Pero el problema es el siguiente: en el contexto topológico $|\sigma|$ y $|L|$ cubren $|K|$ pero sus interiores no lo hacen y entonces no podemos utilizar M-V con esos subespacios de $|K|$, por eso vamos a reemplazar $|L|$ por un espacio más grande que lo contenga como retracto por deformación fuerte y que junto con $|\sigma|$ satisfagan las hipótesis de M-V:

Ejercicio 3. *Sea K complejo simplicial finito y $\sigma \in K$ un simplex maximal. Considerar el subcomplejo $L = K - \sigma$. Sea $b \in |\sigma|$ el baricentro de σ y $\dot{\sigma}$ el borde de σ. Probar que $|L| \subset |K| - \{b\}$ y $|\dot{\sigma}| \subset |\sigma| - \{b\}$ son retractos por deformaciones fuertes. En particular, las inclusiones inducen isomorfismos en las homologías $H_*(|L|) = H_*(|K| - \{b\})$ y $H_*(|\dot{\sigma}|) = H_*(|\sigma| - \{b\})$.*

Comenzamos ahora con la demostración del resultado principal para el caso finito. Probaremos, entonces, que el morfismo φ definido anteriormente induce isomorfismos en las homologías para todo complejo simplicial finito K. Lo hacemos por inducción en la cantidad q de símplices de K. El caso $q = 1$ es claro porque en ese caso K es un punto y el resultado vale trivialmente.

Supongamos ahora que el resultado es válido para todo complejo simplicial con menos de q símplices y sea K complejo simplicial con q símplices. Tomamos σ un simplex maximal de K y consideramos L como en el ejercicio anterior.

Ejercicio 4. *Probar, utilizando Mayer-Vietoris, que el siguiente diagrama de complejos de cadenas es conmutativo y que sus filas son exactas:*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C_*(\dot{\sigma}) \arrow[r] \arrow[d, "i\varphi"'] & C_*(\sigma) \oplus C_*(L) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi \oplus j\varphi"'] & C_*(K) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & S_*(|\sigma| - \{b\}) \arrow[r] & S_*(|\sigma|) \oplus S_*(|K| - \{b\}) \arrow[r] & S_*(|K|) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

donde $i : S_*(|\dot{\sigma}|) \to S_*(|\sigma| - \{b\})$ y $j : S_*(|L|) \to S_*(|K| - \{b\})$ son las inclusiones.

De esto se deduce, por Ejercicio 1, que se tiene un diagrama conmutativo de sucesiones exactas largas:

$$\begin{tikzcd}
H_n(\dot{\sigma}) \arrow[r] \arrow[d] & H_n(\sigma) \oplus H_n(L) \arrow[r] \arrow[d] & H_n(K) \arrow[r] \arrow[d] & H_{n-1}(\dot{\sigma}) \arrow[r] \arrow[d] & H_{n-1}(\sigma) \oplus H_{n-1}(L) \arrow[d] \\
H_n(|\sigma| - \{b\}) \arrow[r] & H_n(|\sigma|) \oplus H_n(|K| - \{b\}) \arrow[r] & H_n(|K|) \arrow[r] & H_{n-1}(|\sigma| - \{b\}) \arrow[r] & H_{n-1}(|\sigma|) \oplus H_{n-1}(|K| - \{b\})
\end{tikzcd}$$

Ejercicio 5. *Usar hipótesis inductiva y lema de los 5 (ver práctica adicional 1) para concluir que* $\varphi : H_n(K) \to H_n(|K|)$ *es isomorfismo para todo* n*.*

Nota: tener cuidado con la hipótesis inductiva para probar el ejercicio anterior en el caso $K = \sigma$. Ese caso se puede tratar aparte porque ya se ha calculado la homología de los símplices (tanto a nivel simplicial como topológico).

Ahora, utilizando la validez del resultado para los complejos simpliciales finitos, podemos probar su validez en general: Sea K complejo simplicial y sea $n \in \mathbb{N}_0$. Debemos ver que $\varphi : H_n(K) \to H_n(|K|)$ es isomorfismo. Teniendo en cuenta que toda cadena en $|K|$ tiene imagen compacta y por lo tanto su imagen cae dentro de un subcomplejo finito $\tilde{K} < K$, probar que:

Ejercicio 6. $\varphi : H_n(K) \to H_n(|K|)$ *es isomorfismo. (Sugerencia: el párrafo anterior, la validez del resultado para* $\tilde{K}$ *finito y probar que es mono y epi).*

Naturalidad. El isomorfismo φ descripto entre las homologías simpliciales y singulares es natural, es decir: para todo morfismo simplicial $f : K \to L$ se tiene un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} H_n(K) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "\varphi"'] & H_n(L) \arrow[d, "\varphi"] \\ H_n(|K|) \arrow[r, "f_*"] & H_n(|L|) \end{tikzcd}$$

No probaremos este hecho en estas notas porque necesitaríamos para eso utilizar el método de modelos acíclicos (que no fue explicado aún). Sólo notar que la naturalidad de este isomorfismo es a nivel homología pero no a nivel complejos de cadenas (ya que el morfismo de complejos de cadenas depende del orden total de los vértices de los complejos simpliciales en cuestión).

Ejercicio 7. *Utilizando la sucesión exacta larga de homología relativa (a nivel simplicial y singular), lema de los 5 y el resultado principal (Ejercicio 6), probar que para todo par* (K, L) *donde* L *es un subcomplejo de* K*,* φ *induce un isomorfismo* $\varphi : H_n(K, L) \to H_n(|K|, |L|)$*.*