

Topología Diferencial 2005
Ejercicios Adicionales I:
Valores regulares y teorema de Sard

1. Sean M y N variedades suaves, con M compacta. Sea $f : M \rightarrow N$ de clase C^1 y sea $y \in N$ valor regular de f .
 - a) Probar que la fibra $f^{-1}(y)$ es finita (o vacía).
 - b) Para todo valor regular $y \in N$, definimos $g(y)$ como el cardinal de la fibra $f^{-1}(y)$. Probar que g es una función localmente constante (como función definida en el subespacio de valores regulares).

2. Sea M una variedad compacta suave con borde. Probar que no existe una función suave

$$r : M \rightarrow \partial M$$

que deje fijo el borde (es decir, una retracción suave). En particular, no existe retracción $r : D^n \rightarrow S^{n-1}$. (Sugerencia: Si y es valor regular de r , entonces $r^{-1}(y)$ es variedad compacta de dimensión 1. Las variedades compactas de dimensión 1 son uniones finitas de esferas e intervalos y por lo tanto, $\partial r^{-1}(y)$ es un conjunto con una cantidad par de elementos).

3. Usar el ejercicio anterior para probar, primero, que toda función suave $f : D^n \rightarrow D^n$ tiene puntos fijos. Luego, usando aproximaciones C^∞ de una función continua, probar que toda función continua $f : D^n \rightarrow D^n$ tiene puntos fijos.
4. Probar que, si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable (no necesariamente C^1), entonces el conjunto de valores críticos tiene medida cero.
5. Sean M y N variedades suaves de la misma dimensión, con M compacta y sin borde. Sean $f, g : M \rightarrow N$ suaves y suavemente homotópicas (es decir, que existe una homotopía suave $H : M \times I \rightarrow N$). Probar que, si $y \in N$ es un valor regular para f y g , entonces

$$\#f^{-1}(y) \equiv \#g^{-1}(y) \pmod{2}$$

(Sugerencias: suponer primero que y es valor regular para la homotopía H y usar que el borde de las variedades compactas de dimensión 1 tienen un número par de puntos. Luego probarlo para y general, usando que $\#f^{-1}(y)$ y $\#g^{-1}(y)$ son localmente constantes.)