Topología Diferencial 2005
Adicionales II

Cálculos y Aplicaciones de la Cohomología de de Rham

1. ¿Puede $\mathbb{R}^2$ escribirse como unión de dos abiertos conexos U y V tales que $U \cap V$ no sea conexo ?

2. Sean $p, q \in \mathbb{R}^n$ tales que $p \neq q$. Se dice que un subconjunto cerrado $A \subset \mathbb{R}^n$ separa a p de q si esos puntos pertenecen a componentes conexas distintas de $\mathbb{R}^n - A$.

   Dados A y B cerrados disjuntos de $\mathbb{R}^n$ y dados dos puntos distintos p y q de $\mathbb{R}^n - (A \cup B)$, probar que, si ni A ni B separan a los puntos, entonces tampoco lo hace $A \cup B$.

3. Sean $f, g : X \to S^n$ continuas tales que $f(x) \neq -g(x)$ para todo x. Probar que $f \simeq g$. Probar que toda función continua y no sobreyectiva $f : X \to S^n$ es homotópica a una constante.

4. Probar que $\mathbb{R}^n$ no contiene un subconjunto homeomorfo a D^m para $m > n$.

5. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ homeomorfo a S^k (para $1 \leq k \leq n-2$). Probar que
$$H^q_{dR}(\mathbb{R}^n - A) = \begin{cases} \mathbb{R} & q = 0, n-k-1, n-1 \\ 0 & q \neq 0, n-k-1, n-1 \end{cases}$$

6. Sea $f : D^n \to \mathbb{R}^n$ continua y sea $r \in (0,1)$. Supongamos que $||f(x) - x|| \leq 1 - r$ para todo $x \in S^{n-1}$. Probar que $f(D^n)$ contiene al disco cerrado de radio r y centro 0.

7. Sean $\alpha, \beta : [0,1] \to D^2$ continuas e inyectivas tales que
$$\alpha(0) = (-1,0),\ \alpha(1) = (1,0),\ \beta(0) = (0,-1),\ \beta(1) = (0,1)$$
   Probar que las curvas α y β se intersecan.