Topología Diferencial 2005
Práctica Uno: Introducción

1. Sean M y N variedades de clase C^r. Probar que una función $f : M \to N$ es de clase C^r si y sólo si para todo abierto W de algún $\mathbb{R}^d$ y para toda función $g : W \to M$ de clase C^r, se cumple que $fg : W \to N$ es C^r.

2. Sea M variedad C^r y $A \subset M$ subespacio conexo. Probar que, si existe una retracción de clase C^r, es decir una función $r : M \to M$ tal que $r(M) = A$ y $r|_A = id$, entonces A es una subvariedad C^r de M (sug: usar que r tiene rango constante cerca de A).

3. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ continua. Probar que existe Φ una estructura diferencial C^∞ en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ tal que la función $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ definida por $g(x) = (x, f(x))$ es un embedding C^∞ (donde $\mathbb{R}^n$ tiene la estructura diferencial usual y $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ la estructura Φ).

4. (Ejercicio Complicado) Probar que toda variedad conexa de dimensión 1 es difeomorfa a S^1 si es compacta y a $\mathbb{R}$ si no es compacta.

5. Probar que toda función de clase C^r que es un C^1-difeomorfismo, resulta un difeomorfismo C^r.

6. Probar que existe un difeomorfismo natural $T(M \times N) = TM \times TN$.

7. Sea $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ el gráfico de la función $g(x) = |x|^{1/3}$. Probar que G admite una estructura C^∞ tal que la inclusión $G \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ es C^∞.

8. Probar con un ejemplo que una inmersión inyectiva puede no ser un embedding. Probar además que, cuando la inmersión inyectiva proviene de una variedad compacta, entonces resulta embedding.

9. Sea M una variedad compacta C^1. Probar que toda función $f : N \to \mathbb{R}$ de clase C^1 tiene al menos dos puntos críticos.

10. Sea $f : S^1 \to \mathbb{R}$ de clase C^1 y sea $y \in \mathbb{R}$ un valor regular. Probar que:
    a) $f^{-1}(y)$ tiene un número par de puntos.
    b) Si $f^{-1}(y)$ tiene $2k$ puntos, entonces f tiene al menos $2k$ puntos críticos.