Topología Diferencial 2005
Práctica Dos

Cohomología de de Rham

1. Calcular la cohomología de de Rham de la esfera S^n.
2. Calcular la cohomología de de Rham de la variedad que se obtiene quitándole r puntos al plano. Idem para la cohomología con soporte compacto.
3. Utilizar la cohomología de de Rham para probar que el toro no es difeomorfo a la esfera S^2.
4. Probar que, si n es impar, la antípoda $A : S^n \to S^n$ no es homotópica a la identidad.
5. Probar que el plano proyectivo real $P^n(\mathbb{R})$ es orientable si y sólo si n es impar.
6. Calcular la cohomología de de Rham y la cohomología con soporte compacto de la banda de Möbius abierta (es decir, sin el borde).

Ejercicios básicos de cohomología general

1. Sea $0 \to M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \to 0$ una sucesión exacta. Probar que son equivalentes:
   a) f es sección.
   b) g es retracción.
   c) Existe un isomorfismo $\phi : N \to M \oplus P$ tal que $\phi f(m) = (m, 0)$ y $g\phi^{-1}(m, p) = p$.
2. Hallar todos los grupos abelianos posibles M en las siguientes sucesiones exactas:
   a) $0 \to \mathbb{Z}_2 \to M \to \mathbb{Z}_4 \to 0$
   b) $0 \to \mathbb{Z}_m \to M \to \mathbb{Z}_n \to 0$
   c) $0 \to Z_m \to M \to \mathbb{Z}^n \to 0$
3. (Lema de los 5) Dado el siguiente diagrama de filas exactas

$$\begin{tikzcd} M_1 \arrow[r] \arrow[d, "a"'] & M_2 \arrow[r] \arrow[d, "b"'] & M_3 \arrow[r] \arrow[d, "c"'] & M_4 \arrow[r] \arrow[d, "d"'] & M_5 \arrow[d, "e"'] \\ N_1 \arrow[r] & N_2 \arrow[r] & N_3 \arrow[r] & N_4 \arrow[r] & N_5 \end{tikzcd}$$

   Probar que
   a) Si b y d son mono y a es epi, entonces c es mono.
   b) Si b y d son epi y e es mono, entonces c es epi.
   c) Concluir que si a, b, d y e son iso, entonces c es iso.
4. Sean (C^*, d) y (D^*, d') complejos. Probar que $(C^* \oplus D^*, d \oplus d')$ es un complejo y que
$$H^*(C \oplus D) = H^*(C) \oplus H^*(D).$$