

Topología Diferencial 2005

Práctica Tres

Haces y Cohomología

Propiedades básicas de haces y cohomología de haces

1. Mostrar que el haz de gérmenes de funciones continuas sobre los reales no es Hausdorff.
2. Sea $p : S \rightarrow M$ un haz. Probar que la sección 0 (que le asigna a cada punto m el 0 de S_m) es continua.
3. Probar que las secciones de haces son homeos locales y por lo tanto, abiertas.
4. Probar que, si dos secciones de un haz coinciden en un punto, entonces coinciden en todo un abierto. Deducir que el conjunto de puntos en donde una sección no es cero es un cerrado.
5. Probar que los morfismos de haces son homeos locales.
6. Probar que, si dos morfismos de haces coinciden en un punto, entonces coinciden en todo un abierto alrededor del punto. Deducir que el núcleo de un morfismo es abierto en el dominio y por lo tanto, un subhaz.
7. Mostrar que el producto tensorial de dos prehaces completos no es necesariamente completo.
8. Dar ejemplos de haces finos que tienen subhaces que no son finos.

9. Sea H^* una teoría de cohomología para M con coeficientes en haces de A -módulos. Sea

$$0 \rightarrow S \rightarrow C_1 \rightarrow C_2 \rightarrow \dots$$

una resolución fina del haz S . Probar que, para todo q , se tienen isomorfismos canónicos

$$H^q(M, S) \simeq H^q(\Gamma(C^*))$$

donde $\Gamma(C^*)$ es el complejo de A -módulos de secciones globales.

10. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo de haces

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathcal{C}_0 & \longrightarrow & \mathcal{C}_1 & \longrightarrow & \mathcal{C}_2 & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow id & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathcal{D}_0 & \longrightarrow & \mathcal{D}_1 & \longrightarrow & \mathcal{D}_2 & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

donde las dos filas son resoluciones finas y sin torsión del haz constante $\mathcal{A}$. Sabemos que cada una de estas resoluciones induce una teoría de homología, que notaremos H^* y $\tilde{H}^*$ respectivamente. Probar que este diagrama induce el único morfismo de cohomología $H^* \rightarrow \tilde{H}^*$.

Cohomología de Alexander-Spanier

Sea X un espacio topológico no vacío, R un anillo conmutativo y T un R -módulo.

Denotamos X^q al conjunto $X \times X \times \dots \times X$. Para $q \geq 0$, sea $A^q(X, T)$ el R -módulo de funciones de conjuntos $X^{q+1} \rightarrow T$, con multiplicación y suma punto a punto. Se define un morfismo lineal

$$d : A^q(X, T) \rightarrow A^{q+1}(X, T)$$

por la fórmula

$$df(m_0, \dots, m_{q+1}) = \sum_{i=0}^{q+1} (-1)^i f(m_0, \dots, \hat{m}_i, \dots, m_{q+1})$$

donde $\hat{m}$ significa que se omite ese elemento.

Ejercicio 1. Probar que $d^2 = 0$ y por lo tanto se tiene un complejo de R -módulos

$$0 \rightarrow A^0(X, T) \rightarrow A^1(X, T) \rightarrow \dots$$

y que denotaremos $A^*(X, T)$.

En realidad, la cohomología de este complejo no es muy interesante, como lo demuestra el siguiente ejercicio:

Ejercicio 2. Probar que $H^0(A^*(X, T)) = T$ y $H^q(A^*(X, T)) = 0$ para $q > 0$.

Definiremos entonces un complejo cociente de este y cuya cohomología será la cohomología de Alexander-Spanier del espacio X .

Una función $f \in A^q(X, T)$ se dirá que es localmente cero si existe un cubrimiento abierto $\mathcal{U}$ de X tal que f se anula en todas las $(q+1)$ -uplas de X que caen en algun abierto de $\mathcal{U}$. Es decir, si definimos $\mathcal{U}^{q+1} = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U^{q+1} \subset X^{q+1}$, entonces f se anula en $\mathcal{U}^{q+1}$.

Notar que el subconjunto $A_0^q(X, T)$ formado por las f localmente cero, es un submódulo de $A^q(X, T)$. Más aún, si restringimos el morfismo d definido anteriormente, obtenemos un morfismo

$$d : A_0^q(X, T) \rightarrow A_0^{q+1}(X, T).$$

Es decir, $A_0^*(X, T)$ forma un subcomplejo y podemos, por lo tanto, tomar el complejo cociente

$$\tilde{A}^*(X, T) = A^*(X, T) / A_0^*(X, T),$$

cuya cohomología se denomina la cohomología de Alexander-Spanier de X con coeficientes en el R -módulo T :

$$H_{A-S}^q(X, T) = H^q(\tilde{A}^*(X, T))$$

Ejercicio 3. Probar que toda función continua $f : X \rightarrow Y$ induce en forma canónica un morfismo de complejos $f^* : \tilde{A}^*(Y, T) \rightarrow \tilde{A}^*(X, T)$ y por lo tanto un morfismo f^* entre las cohomologías.

Ahora veremos que, en el caso de las variedades, esto define una teoría de cohomología con coeficientes en haces y, por unicidad salvo isomorfismos de teorías de cohomología, esta cohomología coincide con las cohomologías clásicas.

Sea, entonces, M una variedad, sea R un DIP y sea T un R -módulo.

Para cada abierto U de la variedad y para cada $q \geq 0$, consideramos el R -módulo $A^q(U, T)$.

Si $U \subset V$, entonces $U^{q+1} \subset V^{q+1}$ y se tiene entonces un morfismo de restricción

$$\rho_{UV} : A^q(V, T) \rightarrow A^q(U, T).$$

Consideremos entonces para cada $q \geq 0$ fijo, el prehaz $\{A^q(U, T); \rho_{UV}\}$.

Ejercicio 4.

1. Probar que estos prehaces son *casi completos*.

(Recordar que un prehaz $\{S_U, \rho_{UV}\}$ es casi completo si cada vez que tenemos un cubrimiento abierto de U y una familia de elementos en $a_i \in S_{U_i}$ para cada U_i del cubrimiento y que se pegan bien, entonces existe un elemento $a \in S_U$ (no necesariamente único) que, restringido a cada U_i es el a_i).

2. Mostrar que, en general, no son completos.

Para cada q , consideremos el haz de gérmenes inducido, que denotaremos $\mathcal{A}^q(T)$. Los morfismos d mencionados arriba, inducen morfismos correspondientes entre los haces $\mathcal{A}^q(T) \rightarrow \mathcal{A}^{q+1}(T)$.

Se tiene también la inclusión natural $i : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{A}^0(T)$ (donde $\mathcal{T}$ es el haz constante con fibra T).

Estos morfismos de haces inducen un diagrama

$$0 \rightarrow \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{A}^0(T) \rightarrow \mathcal{A}^1(T) \rightarrow \dots$$

Ejercicio 5. Probar que este diagrama de haces es una resolución fina y sin torsión del haz $\mathcal{T}$.

Tomando $\mathcal{T} = \mathcal{R}$ (haz constante con fibra R), el ejercicio 5 prueba que esto define una teoría de cohomología para M con coeficientes en haces, vía

$$H^q(M, S) = H^q(\Gamma(\mathcal{A}^*(R) \otimes S))$$

Notar que, por el ejercicio 9 de la primera parte de esta práctica y por el ejercicio 5 de esta parte, para los haces $\mathcal{T}$ (constantes de fibra T), se tiene que

$$H^q(M, \mathcal{T}) = H^q(\Gamma(\mathcal{A}^*(T)))$$

Ejercicio 6. Usando que los prehaces $\{A^q(U, T); \rho_{UV}\}$ son casi completos, probar que el morfismo natural $A^*(M, T)/A_0^*(M, T) \rightarrow \Gamma(\mathcal{A}^*(T))$ es un isomorfismo de complejos y por lo tanto se tiene, para todo q , un isomorfismo

$$H_{A-S}^q(M, T) = H^q(M, \mathcal{T}).$$

En particular, usando la unicidad salvo isomorfismos de las teorías de cohomologías con coeficientes en haces, se prueba que la cohomología de Alexander-Spanier coincide con las otras cohomologías ya estudiadas (singular, singular C^∞ , de Rham (para el caso $A = \mathbb{R}$), etc).