

Topología Diferencial 2005

Práctica Cuatro Fibrados Vectoriales

1. Probar que la cinta de Möbius abierta es un $\mathbb{R}$ -fibrado de línea (i.e de dimensión 1) no trivial sobre S^1 .
2. Probar que, si ξ y ξ' son fibrados triviales sobre un espacio B , entonces $\xi \oplus \xi'$ es un fibrado trivial sobre B .
3. Sea $C \rightarrow S^1$ la banda de Möbius abierta. Probar que $C \oplus C$ es isomorfo al fibrado trivial $S^1 \times \mathbb{R}^2$.
4. Sea TS^n el fibrado tangente de S^n y sea NS^n el fibrado normal de $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ (fibrado de línea). Probar que $TS^n \oplus NS^n = S^n \times \mathbb{R}^{n+1}$.
5. Sea $p : E \rightarrow B$ fibrado vectorial, $U \subset B$ subespacio y $f : A \rightarrow B$ continua. Probar que, si $E|_U$ es trivial, entonces $f^*(E)|_{f^{-1}(U)}$ trivial. En particular, si E es trivial sobre B , entonces $f^*(E)$ es trivial sobre A .
6. Sea $p : C \rightarrow S^1$ la banda de Möbius abierta y sea $f : S^1 \rightarrow S^1$ la función definida por $f(z) = z^2$. Probar que $f^*(C)$ es el fibrado de línea trivial.
7. Probar las siguientes propiedades del pullback de fibrados:
 - a) $(fg)^*(E) = g^*(f^*(E))$
 - b) $id^*(E) = E$
 - c) $f^*(E \oplus E') = f^*(E) \oplus f^*(E')$.
8. Sea B un espacio compacto y Hausdorff y sea $\xi = (p : E \rightarrow B)$ fibrado vectorial. Probar que existe ξ' tal que $\xi \oplus \xi'$ es trivial sobre B .
9. Probar que un fibrado vectorial tiene k secciones linealmente independientes si y sólo si tiene un subfibrado trivial k -dimensional.
10. Sea $p : E \rightarrow B$ fibrado vectorial y $E' \subset E$ subfibrado. Construir un fibrado vectorial cociente $E/E' \rightarrow B$.
11. Probar que el complemento ortogonal de un subfibrado es independiente, salvo isomorfismos, de la elección del producto interno.
12. Sea $\xi = (p : E \rightarrow B)$ un $\mathbb{R}$ -fibrado de dimensión n . Consideremos $\mathbb{R}^n$ con la orientación usual (dada por la base canónica). Una orientación en ξ es una orientación en los espacios vectoriales E_b para todo b (i.e, una clase de bases ordenadas) tal que existe una trivialización local

$$\{h_i : p^{-1}(U_i) \xrightarrow{\cong} U_i \times \mathbb{R}^n\}$$

que cumple que la restricción $h_i : E_b \rightarrow \mathbb{R}^n$ preserva orientación para todo b en U_i (para todo i). El fibrado ξ se dice *orientable* si admite alguna orientación. Probar que una variedad M es orientable si y sólo si su fibrado tangente es un fibrado orientable.

13. Sea $p : E \rightarrow M$ un $\mathbb{R}$ -fibrado C^∞ sobre una variedad M . Probar que, si M es orientable y el fibrado es orientable entonces E es una variedad orientable.

14. (Difícil) Probar que todo $\mathbb{R}$ -fibrado vectorial C^∞ sobre una variedad simplemente conexa es orientable.
15. Sea $Vect^n(B)$ el conjunto de clases de isomorfismos de $\mathbb{R}$ -fibrados vectoriales sobre B de dimensión n . Calcular $Vect^n(S^1)$ y $Vect^n(\mathbb{R}^m)$.
16. Sea $p : E \rightarrow M$ un $\mathbb{R}$ -fibrado C^∞ sobre una variedad M . Probar que la inclusión de M en E mediante la sección cero es un retracts por deformación. En particular $H_{dR}^q(E) = H_{dR}^q(M)$.
17. Por el lema de Poincaré con soporte compacto, sabemos que, si $p : E \rightarrow M$ es un $\mathbb{R}$ -fibrado C^∞ trivial de dimensión n sobre una variedad M , entonces $H_c^q(E) = H_c^{q-n}(M)$. Probar que esta fórmula no es en general cierta si el fibrado no es trivial, mostrando que la cohomología con soporte compacto de la banda de Möbius abierta es nula (sugerencia: para probar esto usar Mayer-Vietoris).
18. Sea $p : E \rightarrow M$ un $\mathbb{R}$ -fibrado C^∞ de dimensión n sobre una variedad M . Probar que, si E y M son orientables y de tipo finito, entonces vale la fórmula $H_c^q(E) = H_c^{q-n}(M)$. (sugerencia: dualidad de Poincaré).