

Topología Diferencial
Práctica Cinco
Poliedros y Espacios celulares.

- (1) Sea K un complejo simplicial y $|K|$ su realización geométrica. Recordar que $|K|$ es el espacio topológico que consiste en todas las funciones α de los vértices de K al intervalo I cuyos soportes son simplices de K y $\sum \alpha(v) = 1$.

Dado un vértice v de K , se define la estrella de v como el subespacio

$$st\ v = \{\alpha \in |K|, \alpha(v) \neq 0\}$$

Probar que:

- (a) $st\ v$ es un abierto de $|K|$.
- (b) $st\ v = \bigcup \{< s >, v \text{ es vértice de } s\}$.
- (c) Sea $L \subset K$ y sean $v_0, \dots, v_q$ vértices de K . Entonces $v_0, \dots, v_q$ son vértices de un simplex de L si y sólo si

$$\bigcap (st\ v_i) \cap |L| \neq \emptyset$$

- (2) Sea X un conjunto y $\mathcal{U} = \{U_i\}$ una colección de subconjuntos de X . El *nervio* de $\mathcal{U}$ es el complejo simplicial $N(\mathcal{U})$ cuyos simplices son los subconjuntos finitos no vacíos de $\mathcal{U}$, $s = \{U_{i_1}, \dots, U_{i_n}\}$ tales que $\bigcap U_{i_k} \neq \emptyset$.

- (a) Probar que efectivamente $N(\mathcal{U})$ es un complejo simplicial.
- (b) Sea K complejo simplicial y sea $\mathcal{U} = \{st\ v | v \in K\}$ cubrimiento abierto de $|K|$. Probar que la función que le asigna a cada vértice v de K el abierto $st\ v$ de $|K|$ induce un isomorfismo simplicial $K = N(\mathcal{U})$.

- (3) Sea $\mathcal{U}$ un cubrimiento por abiertos de un espacio topológico X y sea $N(\mathcal{U})$ su nervio. Una función continua $f : X \rightarrow |N(\mathcal{U})|$ se dice canónica si $f^{-1}(st\ U) \subset U$ para todo U del cubrimiento $\mathcal{U}$. Probar que:

- (a) Si $\mathcal{U}$ es un cubrimiento localmente finito de X , existe una biyección entre las funciones canónicas $X \rightarrow |N(\mathcal{U})|$ y las particiones de la unidad subordinadas a $\mathcal{U}$.
- (b) Si $\mathcal{U}$ es cubrimiento localmente finito de X , entonces todas las funciones canónicas $X \rightarrow |N(\mathcal{U})|$ son homotópicas.

- (4) Un espacio topológico X tiene dimensión $\leq n$ si todo cubrimiento abierto de X admite un refinamiento abierto cuyo nervio es un complejo simplicial de dimensión $\leq n$. Decimos que $\dim X = n$ si $\dim X \leq n$ y $\dim X \not\leq n-1$. Probar que:

- (a) Si $A \subseteq X$ es cerrado entonces $\dim A \leq \dim X$.
- (b) Si K complejo simplicial finito y $\dim K \leq n$ entonces $\dim |K| \leq n$.
- (c) Si s es un n -simplex, entonces $\dim |s| = n$.
- (d) Si X es espacio paracompacto y $\dim X \leq n$, entonces toda función continua $f : X \rightarrow S^m$ es nullhomotópica para $m > n$.

- (5) Sea X un espacio métrico compacto y sea C el espacio de funciones continuas $f : X \rightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$ con la métrica:

$$d(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)| \mid x \in X\}$$

Probar que:

- (a) C es espacio métrico completo.
- (b) Para todo $m \in \mathbb{N}$, el subconjunto

$$C_m = \{f \in C \mid \text{diam}(f^{-1}(z)) < \frac{1}{m} \ \forall z \in \mathbb{R}^{2n+1}\}$$

es abierto en C .

- (c) $\bigcap C_m$ es el conjunto de homeomorfismos de X en $\mathbb{R}^{2n+1}$.
- (d) Si $\dim X \leq n$, entonces C_m es denso en C para todo m . Deducir que, en este caso, X puede ser inmerso en $\mathbb{R}^{2n+1}$.

- (6) Una *pseudovariiedad n -dimensional* es un complejo simplicial K que cumple lo siguiente:
- (i) K es homogéneamente n -dimensional, es decir, todo simplex de K es cara de algún n -simplex.
 - (ii) Todo $(n-1)$ -simplex de K es cara de a lo sumo dos n -símplices.
 - (iii) Para todo par de n -símplices s, s' , existe una sucesión finita $s = s_0, s_1, \dots, s_r = s'$ de n -símplices tales que s_i y s_{i+1} tienen una $(n-1)$ -cara en común para todo i .

El *borde* de una pseudovariiedad de dimensión n es el subcomplejo $\dot{K}$ generado por los $(n-1)$ -símplices que son caras de exactamente un n -simplex de K . Si $\dot{K}$ es vacía decimos que K es un pseudovariiedad sin borde.

Probar lo siguiente:

- (a) Un n -simplex s es una pseudovariiedad n -dimensional y su borde (como pseudovariiedad) es $\dot{s}$.
 - (b) El borde de una pseudovariiedad finita de dimensión 1 es vacío ó tiene exactamente dos vértices.
- (7) Sea $p : E \rightarrow B$ un revestimiento. Probar que, si B es un poliedro, entonces E es un poliedro (y de la misma dimensión que B).
- (8) Una función continua $f : |K| \rightarrow |L|$ entre poliedros se dice lineal respecto de K y L si $f = |\phi|$, donde $\phi : K \rightarrow L$ es un morfismo simplicial. La función f se dice lineal a trozos si existe una subdivisión K' de K tal que $f : |K'| \rightarrow |L|$ es lineal respecto de K' y L . Probar que, si $f : |K| \rightarrow |L|$ es un homeomorfismo lineal a trozos, entonces existen subdivisiones K' y L' y un isomorfismo simplicial $\phi : K' \rightarrow L'$.
- (9) ¿Será cierto que, si $|K|$ y $|L|$ son poliedros homeomorfos, entonces existe un homeomorfismo lineal a trozos entre ambos? (Sugerencia: piénselo un rato pero no trate de resolverlo).
- (10) Describir estructuras de CW-complejos para los discos D^n y para el disco unitario infinito D^∞ . (Ojo: observar que D^n NO se obtiene de D^{n-1} adjuntando n -celdas).
- (11) Comprobar que los poliedros son CW-complejos con estructura celular inducida por la estructura simplicial.
- (12) Sea X un CW-complejo. Probar que todo compacto $K \subseteq X$ interseca sólo un número finito de interiores de celdas.
- (13) Sea X un CW-complejo, Y un espacio topológico y $f : X \rightarrow Y$ una función. Probar que son equivalentes:
- (a) $f : X \rightarrow Y$ es continua.
 - (b) La restricción $f : e_\alpha^n \rightarrow Y$ es continua para toda celda e_α^n .
 - (c) $f \circ f_\alpha^n : D^n \rightarrow Y$ es continua para toda celda e_α^n , donde $f_\alpha^n : D^n \rightarrow e_\alpha^n$ es la función característica de la celda.
- (14) Sea $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base cualquiera del espacio vectorial $\mathbb{R}^n$. Probar que la base define una estructura de CW-complejo en $\mathbb{R}^n$ tomando como k -esqueleto al conjunto
- $$(\mathbb{R}^n)^k = \left\{ \sum_{i=1}^n s_i v_i \mid s_i \in \mathbb{R} \text{ y } s_i \in \mathbb{Z} \text{ para al menos } n-k \text{ índices } i \right\}$$
- (15) Probar que si X e Y son CW-complejos e Y es localmente compacto entonces $X \times Y$ es un CW-complejo. En particular, si X es un CW-complejo entonces $X \times I$ también lo es. Describir la estructura celular de $X \times I$ en función de la estructura celular de X .
- (16) Sea (X, A) un CW-complejo relativo. Probar que X/A es un CW-complejo.
- (17) Supongamos que X se obtiene de A adjuntando una n -celda e^n . Si x es un punto del interior de la celda, entonces A es un retracto por deformación fuerte de $X - \{x\}$.