

Topología Diferencial 2005
Práctica Seis
Teoría de Morse y Aplicaciones (Parte I)

1. Probar que la función determinante definida en la matrices $n \times n$ es función de Morse para $n = 2$ y no es Morse para $n > 2$.
2. Sea $H : \mathbb{R}^n \times I \rightarrow \mathbb{R}$ una función C^∞ y sea $H_t(x) = H(x, t)$. Probar que si H_0 es Morse en algún entorno de un compacto $K \subset \mathbb{R}^n$, entonces existe un $\varepsilon > 0$ tal que H_t es Morse en algún entorno de K para todo $t < \varepsilon$. En particular, si f es una función de Morse definida en una variedad compacta M y se tiene $H : M \times I \rightarrow \mathbb{R}$ una homotopía C^∞ con $H_0 = f$, entonces H_t es Morse para t suficientemente chico.
3. Sea M subvariedad de $\mathbb{R}^n$. Probar que existe alguna transformación lineal $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ que restringida a M es función de Morse.
4. Sea M variedad compacta. Probar que existen funciones de Morse definidas en M que toman valores distintos en puntos críticos distintos.

Tipos homotópicos y valores críticos: Cruzando niveles críticos.

5. Sabemos que la esfera S^n tiene estructura de CW-complejo con 2 k -celdas por cada $0 \leq k \leq n$ (además de la estructura usual con una 0-celda y una n -celda).
¿Puede encontrar una función de Morse definida en la esfera que tenga 2 puntos críticos de índice k para cada $0 \leq k \leq n$?
6. Completar las demostraciones de los teoremas I y II expuestos en la clase, teniendo en cuenta las sugerencias dadas allí.
7. Sea $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función C^∞ y sean $a < b \in \mathbb{R}$, tal que $f^{-1}([a, b]) \subset M$ es compacto y no contiene puntos críticos. Probar que existe un difeomorfismo $\psi : f^{-1}(a) \times [a, b] \rightarrow f^{-1}([a, b])$ tal que $f\psi$ es la proyección en la segunda coordenada. (Sugerencia: seguir la demostración del teorema I dada en clase).
8. (G. Reeb) Sea M compacta y sin borde de dimensión n . Si M admite una función de Morse con solo dos puntos críticos, entonces M es homeomorfa a la esfera S^n .
9. (Este ejercicio es más complicado y generaliza el resultado del ejercicio anterior) Si M es compacta y sin borde de dimensión n y existe una función C^∞ , $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ con solo dos puntos críticos (quizás degenerados), entonces el complemento de cada punto crítico es difeomorfo a $\mathbb{R}^n$ y M resulta homeomorfa a S^n .