

**Topología Diferencial 2005**  
Práctica Siete  
Teoría de Morse y Aplicaciones (Parte II)

1. Probar que la característica de Euler  $\chi(M)$  de toda variedad compacta sin borde de dimensión impar es 0.
2. Sea  $\mathbb{R}P^n$  el espacio proyectivo real de dimensión  $n$ . Probar, usando funciones de Morse, que su característica de Euler vale 1 cuando  $n$  es par y 0 cuando es impar. (Sugerencia: toda función real definida en el espacio proyectivo es equivalente a una función par definida en la esfera  $S^n$ ).
3. Sea  $S$  una superficie compacta de género  $p$ . Probar que toda función de Morse en  $S$  tiene al menos  $2p + 2$  puntos críticos y que existen funciones de Morse en  $S$  con exactamente esa cantidad de puntos críticos.
4. (Difícil) Definición: Sea  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$   $C^\infty$ . Una subvariedad  $V \subset M$  se dice *crítica* si cada punto de  $V$  es punto crítico de  $f$ . Una subvariedad crítica  $V \subset M$  se dice *no degenerada* de índice  $k$  si cada punto  $x$  de  $V$  cumple lo siguiente: para alguna (es decir, para toda) subvariedad  $W \subset M$  que es transversal a  $V$  en el punto  $x$ , el punto  $x$  es un punto crítico no degenerado de  $f|_W$  con índice  $k$ .

Sea  $M$  compacta sin borde de dimensión  $n$  y  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$   $C^\infty$ . Supongamos que cada punto crítico pertenece a alguna subvariedad crítica no degenerada. Sea  $\mu_k$  la suma de las características de Euler de las subvariedades críticas no degeneradas de índice  $k$ . Entonces se tiene que

$$\chi(M) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \mu_k$$

5. Sea  $\eta^n$  el grupo de cobordismo (no orientado) de dimensión  $n$ . Probar que  $\eta^0 = \mathbb{Z}_2$  y que  $\eta^1 = 0$ .
6. Probar que el producto de variedades induce un producto (bilineal) conmutativo y asociativo
$$\eta^i \times \eta^j \rightarrow \eta^{i+j}$$
7. Sea  $M$  superficie y  $f, g : S^0 \times D^2 \rightarrow M$  embeddings isotópicos. Probar que  $M[f]$  y  $M[g]$  son superficies difeomorfas. (Recordar que  $M[f]$  denota la superficie que se obtiene de  $M$  adjuntándole una manija via la función  $f$ ).
8. Probar que  $M[f]$  es orientable si y sólo si  $f$  es orientable ( es decir, si  $M$  orientable y  $f$  preserva la orientación).