

Topología Diferencial 2007

Práctica Uno

Introducción - Teorema de Sard

1. Sea $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable y sea $y \in \mathbb{R}$ un valor regular. Probar que:
 - a) $f^{-1}(y)$ tiene un número par de puntos.
 - b) Si $f^{-1}(y)$ tiene $2k$ puntos, entonces f tiene al menos $2k$ puntos críticos.
2. Sean M y N variedades diferenciables, con M compacta. Sea $f : M \rightarrow N$ diferenciable y sea $y \in N$ valor regular de f .
 - a) Probar que la fibra $f^{-1}(y)$ es finita (o vacía).
 - b) Para todo valor regular $y \in N$, definimos $g(y)$ como el cardinal de la fibra $f^{-1}(y)$. Probar que g es una función localmente constante (como función definida en el subespacio de valores regulares).

3. Sea M una variedad compacta con borde. Probar que no existe una función diferenciable

$$r : M \rightarrow \partial M$$

que deje fijo el borde (es decir, una retracción suave). En particular, no existe retracción $r : D^n \rightarrow S^{n-1}$. (Sugerencia: Si y es valor regular de r , entonces $r^{-1}(y)$ es variedad compacta de dimensión 1. Las variedades compactas de dimensión 1 son uniones finitas de esferas e intervalos y por lo tanto, $\partial r^{-1}(y)$ es un conjunto con una cantidad par de elementos).

4. Usar el ejercicio anterior para probar, primero, que toda función diferenciable $f : D^n \rightarrow D^n$ tiene puntos fijos. Luego, usando aproximaciones C^∞ de una función continua, probar que toda función continua $f : D^n \rightarrow D^n$ tiene puntos fijos.
5. Sean M y N variedades diferenciables de la misma dimensión, con M compacta y sin borde. Sean $f, g : M \rightarrow N$ diferenciables y diferenciablemente homotópicas (es decir, que existe una homotopía suave $H : M \times I \rightarrow N$). Probar que, si $y \in N$ es un valor regular para f y g , entonces

$$\#f^{-1}(y) \equiv \#g^{-1}(y) \pmod{2}$$

(Sugerencias: suponer primero que y es valor regular para la homotopía H y usar que el borde de las variedades compactas de dimensión 1 tienen un número par de puntos. Luego probarlo para y general, usando que $\#f^{-1}(y)$ y $\#g^{-1}(y)$ son localmente constantes.)

6. Sea M variedad diferenciable y $A \subset M$ subespacio conexo. Probar que, si existe una retracción diferenciable, es decir una función diferenciable $r : M \rightarrow M$ tal que $r(M) = A$ y $r|_A = id$, entonces A es una subvariedad diferenciable de M (sug: usar que r tiene rango constante cerca de A).
7. Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ continua. Probar que existe una estructura C^∞ Φ en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ tal que la función $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ definida por $g(x) = (x, f(x))$ es un embedding C^∞ (donde $\mathbb{R}^n$ tiene la estructura diferenciable usual y $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ la estructura Φ).
8. Sea $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ el gráfico de la función $g(x) = |x|^{1/3}$. Probar que G admite una estructura C^∞ tal que la inclusión $G \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ es C^∞ .
9. Probar con un ejemplo que una inmersión inyectiva puede no ser un embedding. Probar además que, cuando la inmersión inyectiva proviene de una variedad compacta, entonces resulta embedding.