Topología Diferencial 2007
Práctica Dos
Introducción a los CW-complejos

1. Describir diferentes estructuras celulares para las esferas, discos, cinta de Moebius, espacios proyectivos, toros.

2. Una celda de un CW-complejo se dice principal si no es cara de ninguna otra celda. Probar que una celda principal abierta de un CW-complejo X es un abierto de X.

3. Sea X un CW-complejo, Y un espacio topológico y $f : X \to Y$ una función. Probar que son equivalentes:
   a) $f : X \to Y$ es continua.
   b) La restricción $f : e^n_\alpha \to Y$ es continua para toda celda e^n_α.
   c) $f \circ f^n_\alpha : D^n \to Y$ es continua para toda celda e^n_α, donde $f^n_\alpha : D^n \to e^n_\alpha$ es la función característica de la celda.

4. Sea X un CW-complejo. Probar que $H : X \times I \to Y$ es continua si y sólo si todas las restricciones $H : e^n_\alpha \times I \to Y$ lo son.

5. Sea A un subcomplejo de un CW-complejo X. Probar que A es cerrado en X.

6. Sea $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base cualquiera del espacio vectorial $\mathbb{R}^n$. Probar que la base define una estructura de CW-complejo en $\mathbb{R}^n$ tomando como k-esqueleto al conjunto
$$(\mathbb{R}^n)^k = \left\{ \sum_{i=1}^{n} s_i v_i | \; s_i \in \mathbb{R} \text{ y } s_i \in \mathbb{Z} \text{ para al menos } n-k \text{ índices } i \right\}$$

7. Sea K una estructura celular en X y L una estructura celular en Y. Probar que
$$K \times L = \{e^n_\alpha \times e^m_\beta \mid e^n_\alpha \in K,\ e^m_\beta \in L\}$$
es una estructura celular en $X \times Y$.

8. Probar que si X e Y son CW-complejos e Y es localmente compacto entonces $X \times Y$ es un CW-complejo. En particular, si X es un CW-complejo entonces $X \times I$ también lo es. Describir la estructura celular de $X \times I$ en función de la estructura celular de X.

9. Probar, usando el teorema de invariancia de dimensión, que la dimensión de un CW-complejo está bien definida (es decir, no depende de la estructura elegida).

10. Sea X un CW-complejo y X^1 su 1-esqueleto. Probar que son equivalentes:
    a) X es arco conexo
    b) X es conexo
    c) X^1 es conexo

11. Decimos que una función continua entre dos CW-complejos $f : X \to Y$ es celular si $f(X^n) \subseteq Y^n$ para todo esqueleto X^n $(n \geq 0)$. Probar que, si $A \subset X$ es subcomplejo y $f : A \to Y$ es celular, entonces el espacio de adjunción $X \cup_f Y$ es un CW-complejo.