Topología Diferencial 2007

Práctica Tres

Teoría de Intersección módulo 2 y Teorema de Borsuk-Ulam

1. Probar que la ecuación
$$z^7 + \cos(\mid z \mid^2)(1 + 93z^4) = 0$$
tiene solución en $\mathbb{C}$.

2. Sean $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ diferenciables, con X compacta. Sea W una subvariedad regular cerrada en Z y supongamos que g es transversal a W (y por lo tanto $g^{-1}(W)$ es subvariedad de Y). Probar que
$$I_2(f, g^{-1}(W)) = I_2(gf, W)$$

3. Probar que, si $f : X \to Y$ es nullhomotópica (i.e. homotópica a una constante), entonces $I_2(f, Z) = 0$ para toda subvariedad cerrada de dimensión complementaria Z, excepto quizás en el caso que la dimensión de X sea 0.

4. Probar que si Y es una variedad contráctil de dimensión positiva, entonces $I_2(f, Z) = 0$, para toda $f : X \to Y$ con X compacta y toda subvariedad Z cerrada en Y y de dimensión complementaria. (Incluso para el caso en el que dimensión de X sea 0). Deducir que la única variedad compacta contráctil (sin borde) es el singleton.

5. Sea X compacta e Y conexa de la misma dimensión. Sea $f : X \to Y$ tal que $deg_2(f) \neq 0$. Probar que f es sobreyectiva. En particular, si Y no es compacta, $deg_2(g) = 0$ para toda $g : W \to Y$ tal que W compacta de la misma dimensión.

6. Dos subvariedades compactas X, Z de Y se dicen *cobordantes* si existe una subvariedad compacta con borde, W, en $Y \times I$ tal que $\partial W = X \times \{0\} \cup Z \times \{1\}$. Probar que si X y Z son cobordantes en Y, entonces $I_2(X, C) = I_2(Z, C)$ para toda subvariedad C cerrada en Y de dimensión complementaria a X y Z.

7. Probar el teorema de Borsuk-Ulam para el caso $n = 1$: Si $f : S^1 \to S^1$ es simétrica (es decir, $f(-x) = -f(x)$), entonces $deg_2(f) = 1$.

8. Sea X una variedad de dimensión $n - 1$ que es el borde de una variedad compacta W. Sea $f : X \to \mathbb{R}^n$ diferenciable que se puede extender a $F : W \to \mathbb{R}^n$. Probar que, si $z \in \mathbb{R}^n$ es valor regular de F, entonces $F^{-1}(z)$ es finito y $W_2(f, z) = \#F^{-1}(z)$.

9. Sean $p_1, \ldots, p_n$ polinomios homogéneos reales en $n + 1$ variables, todos de grado impar. Probar que las funciones asociadas en $\mathbb{R}^{n+1}$ se anulan simultáneamente a lo largo de alguna recta por el origen.