Topología Diferencial 2007
Práctica Cuatro
Teoría de Morse (Parte I)

1. Probar que la función determinante definida en la matrices $n \times n$ es función de Morse para $n = 2$ y no es Morse para $n > 2$.

2. Sea $H : \mathbb{R}^n \times I \to \mathbb{R}$ una función C^∞ y sea $H_t(x) = H(x, t)$. Probar que si H_0 es Morse en algún entorno de un compacto $K \subset \mathbb{R}^n$, entonces existe un $\varepsilon > 0$ tal que H_t es Morse en algún entorno de K para todo $t < \varepsilon$. En particular, si f es una función de Morse definida en una variedad compacta M y se tiene $H : M \times I \to \mathbb{R}$ una homotopía C^∞ con $H_0 = f$, entonces H_t es Morse para t suficientemente chico.

3. Sea M subvariedad de $\mathbb{R}^n$. Probar que existe alguna transformación lineal $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que restringida a M es función de Morse.

4. Sea M variedad compacta. Probar que existen funciones de Morse definidas en M que toman valores distintos en puntos críticos distintos.

5. Sabemos que la esfera S^n tiene estructura de CW-complejo con 2 k-celdas por cada $0 \leq k \leq n$ (además de la estructura usual con una 0-celda y una n-celda).

   ¿Puede encontrar una función de Morse definida en la esfera que tenga 2 puntos críticos de índice k para cada $0 \leq k \leq n$?

6. Generalizar el Teorema 2 visto en clase: Sea $f : M \to \mathbb{R}$ diferenciable con las mismas hipótesis del teorema 2 pero con la diferencia que $f^{-1}(c)$ tiene ahora finitos puntos críticos no degenerados $p_1, \ldots, p_r$ de índices $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ respectivamente. Entonces existe un $\varepsilon > 0$ tal que $M_{c+\varepsilon}$ es homotópicamente equivalente a $M_{c-\varepsilon} \cup e^{\lambda_1} \cup \ldots \cup e^{\lambda_r}$.