Topología Diferencial 2007
Práctica Cinco
Teoría de Morse (Parte II)

1. Sea $\mathbb{R}P^n$ el espacio proyectivo real de dimensión n. Probar, usando funciones de Morse, que su característica de Euler vale 1 cuando n es par y 0 cuando es impar. (Sugerencia: toda función real definida en el espacio proyectivo es equivalente a una función par definida en la esfera S^n).

2. Sea S una superficie compacta de género p. Probar que toda función de Morse en S tiene al menos $2p+2$ puntos críticos y que existen funciones de Morse en S con exactamente esa cantidad de puntos críticos.

3. (Difícil) Definición: Sea $f : M \to \mathbb{R}$ C^∞. Una subvariedad $V \subset M$ se dice *crítica* si cada punto de V es punto crítico de f. Una subvariedad crítica $V \subset M$ se dice *no degenerada* de índice k si cada punto x de V cumple lo siguiente: para alguna (es decir, para toda) subvariedad $W \subset M$ que es transversal a V en el punto x, el punto x es un punto crítico no degenerado de $f|_W$ con índice k.

   Sea M compacta sin borde de dimensión n y $f : M \to \mathbb{R}$ C^∞. Supongamos que cada punto crítico pertenece a alguna subvariedad crítica no degenerada. Sea μ_k la suma de las características de Euler de las subvariedades críticas no degeneradas de índice k. Entonces se tiene que

$$\chi(M) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \mu_k$$