Topología Diferencial 2007

Práctica Seis

Fibrados vectoriales

1. Probar que, si ξ y ξ' son fibrados triviales sobre un espacio B, entonces $\xi \oplus \xi'$ también es trivial.

2. Sea $C \to S^1$ la banda de Möbius abierta. Probar que $C \oplus C$ es isomorfo al fibrado trivial $S^1 \times \mathbb{R}^2$.

3. Probar que el fibrado estándar de línea $E \to \mathbb{R}P^1 = S^1$ sobre el espacio proyectivo real de dimensión 1 es isomorfo a la banda de Möbius abierta $C \to S^1$.

4. Sea $p : E \to B$ fibrado vectorial, $X \subset B$ subespacio y $f : A \to B$ continua. Probar que si $E|_X$ es trivial, entonces $f^*(E)|_{f^{-1}(X)}$ es trivial. En particular, si E es trivial sobre B, $f^*(E)$ lo es sobre A.

5. Sea $C \to S^1$ la banda de Möbius abierta y sea $f : S^1 \to S^1$ la función definida por $f(z) = z^2$. Probar que $f^*(C)$ es el fibrado de línea trivial.

6. Probar las siguientes propiedades del pullback de fibrados:
   a) $(fg)^*(E) = g^*(f^*(E))$
   b) $id^*(E) = E$
   c) $f^*(E \oplus E') = f^*(E) \oplus f^*(E')$.

7. Probar que un fibrado vectorial admite k secciones linealmente independientes si y sólo si tiene un subfibrado trivial k-dimensional.

8. Sea $p : E \to B$ fibrado vectorial y $E' \subset E$ un subfibrado. Construir el fibrado vectorial cociente $E/E' \to B$.

9. Probar que el complemento ortogonal de un subfibrado es independiente, salvo isomorfismos, de la elección del producto interno.

10. Sea $\xi = (p : E \to B)$ un $\mathbb{R}$-fibrado vectorial de dimensión n. Consideramos a $\mathbb{R}^n$ con la orientación usual dada por la base canónica. Una orientación en ξ consiste en una orientación en cada espacio vectorial E_b de tal forma que existan trivializaciones locales $h : p^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^n$ que cubran al espacio, cuyas restricciones $h_b : E_b \to \mathbb{R}^n$ preserven las orientaciones. El fibrado se dice orientable si admite una orientación. Probar que una variedad diferenciable es orientable si y sólo si su fibrado tangente es un fibrado orientable.

11. Sea $p : E \to M$ un $\mathbb{R}$-fibrado diferenciable sobre una variedad M. Probar que, si M es variedad orientable y el fibrado es orientable, entonces E es una variedad orientable.

12. (Difícil) Probar qeu todo $\mathbb{R}$-fibrado vectorial diferenciable sobre una variedad simplemente conexa es orientable.

13. Calcular $Vect^n(S^1)$ y $Vect^n(\mathbb{R}^m)$.

14. Sea $p : E \to M$ un $\mathbb{R}$-fibrado diferenciable sobre una variedad M. Probar que la inclusión de M en E mediante la sección cero es un retracto por deformación.