Topología Diferencial 2007

Práctica Siete

Cohomología de de Rham y algunas aplicaciones

1. Calcular la cohomología de de Rham de la esfera S^n.

2. Utilizar la cohomología de de Rham para probar que la esfera no es difeomorfa al toro.

3. Calcular la cohomología de de Rham de la variedad que se obtiene quitando r puntos al plano. Idem para la cohomología con soporte compacto.

4. Probar que la antípoda $A : S^n \to S^n$ no es homotópica a la identidad.

5. Probar que el espacio proyectivo real $P\mathbb{R}^n$ es orientable si y sólo si n es impar.

6. Calcular la cohomología de de Rham y con soporte compacto de la banda de Moebius abierta.

7. Puede $\mathbb{R}^2$ escribirse como unión de dos abiertos conexos U y V tales que su intersección no sea conexa ?

8. Sean p, q dos puntos distintos de $\mathbb{R}^n$. Decimos que un cerrado $A \subset \mathbb{R}^n$ separa a p de q si esos dos puntos pertencen a componentes conexas distintas de $\mathbb{R}^n - A$. Dados dos cerrados disjuntos A y B y dos puntos distintos p, q de $\mathbb{R}^n - (A \cup B)$, probar que si ni A ni B separan a los puntos, entonces tampoco los separa $A \cup B$.

9. Probar que $\mathbb{R}^n$ no contiene un subespacio homeomorfo a D^m para $m > n$.

10. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un subespacio homeomorfo a S^k (para $1 \leq k \leq n-2$). Probar que
$$H^q_{dR}(\mathbb{R}^n - A) = \begin{cases} \mathbb{R} & q = 0, n-k-1, n-1 \\ 0 & \text{en los otros casos} \end{cases}$$

11. Sea $f : D^n \to \mathbb{R}^n$ continua y $r \in (0,1)$. Supongamos que $||f(x) - x|| \leq 1 - r$ para todo $x \in S^{n-1}$. Probar que $f(D^n)$ contiene al disco cerrado de radio r y centro 0.

12. Sean $\alpha, \beta : [0,1] \to D^2$ continuas e inyectivas tales que $\alpha(0) = (-1,0)$, $\alpha(1) = (1,0)$, $\beta(0) = (0,-1)$, $\beta(1) = (0,1)$. Probar que las curvas α y β se intersecan.