

Práctica 5

Método del gradiente

5.1 Buscar ejemplos (analíticos o gráficos) donde $\nabla f(x) \neq 0$, $d \neq 0$ y $\nabla f(x)d = 0$, y d sea una dirección de descenso, de aumento, o ninguna de las dos.

5.2 Consideremos el sistema de ecuaciones no lineales

$$f_i(x) = 0, \quad f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, m.$$

¿Como se resolvería utilizando técnicas de minimización sin restricciones?

5.3 Sea $f(x) = \frac{1}{2}\|F(x)\|^2$, donde $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $F \in C^1$. Consideremos el método iterativo definido por

$$x_{k+1} = x_k - \lambda_k (J_F(x_k))^{-1} F(x_k).$$

Supongamos que $J_F(x)$ es no singular para todo x . Probar que si en la condición de Armijo usamos $\alpha = 0,5$, resulta

$$f(x_{k+1})/f(x_k) \leq 1 - \lambda_k.$$

5.4 Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^2$, $f'(0) < 0$ y $f''(x) < 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Sea $\alpha \in (0, 1)$. Probar que, para todo $x > 0$, $f(x) \leq f(0) + \alpha x f'(0)$.

5.5 Si un método de descenso con búsqueda lineal exacta es utilizado para minimizar una función cuadrática $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, mostrar que el paso óptimo está dado por

$$\lambda = -\frac{d^t \nabla q(x)}{d^t \nabla^2 q(x) d},$$

donde d es la dirección utilizada a partir del punto x .

5.6 Sean $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $x, d \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda > 0$ tales que $x + \lambda d$ satisface la condición de Armijo. Sea $0 < \mu < \lambda$. ¿ μ satisface la condición de Armijo? Probar o encontrar un contraejemplo.

5.7 Sean $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^2$ y $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ tales que $\nabla f(\tilde{x}) = 0$ y $\nabla^2 f(\tilde{x})$ no es semidefinida positiva. Probar que existe una dirección de descenso d en \tilde{x} .

5.8 Sean $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ con $\nabla f(\tilde{x}) \neq 0$. Sea $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ definida positiva. Probar que $d = -M \nabla f(\tilde{x})$ es una dirección de descenso en \tilde{x} .