Práctica 4

Convexidad

4.1 Probar que la intersección de conjuntos convexos es convexa.

4.2 Probar que $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq c,\ c > 0\}$, donde $\|.\|$ es una norma cualquiera en $\mathbb{R}^n$, es un conjunto convexo.

4.3 Verificar si las siguientes funciones son convexas:

a. $f(x) = \text{máx}\{g(x), h(x)\}$ donde g y h son funciones convexas.

b. $t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por $t(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$.

4.4 Sea f una función convexa definida en S convexo. Probar que

a. el conjunto $\Gamma \subseteq S$ de los minimizadores globales de f es convexo.

b. cualquier minimizador local de f es un minimizador global.

c. el conjunto $\Gamma_c = \{x \in S \mid f(x) \leq c\}$ es convexo.

d. probar que si f es estrictamente convexa entonces tiene un único minimizador, y es global.

4.5 Sea S un conjunto convexo no vacío en $\mathbb{R}^n$. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(y) = \text{mín}\{\|y - x\| \mid x \in S\}$. Probar que f es convexa.