

Lema de Borel-Cantelli

Definición. Dada una sucesión de sucesos A_1, A_2, \dots en el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$, se define el límite superior de los $\{A_i\}$ como

$$A^\infty := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k.$$

Se dice que el suceso A^∞ es la ocurrencia de un número infinito de los A_k . Veamos por qué.

$$\text{Si } w \in A^\infty \implies w \in \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \quad \forall n.$$

$$\text{En particular, } w \in \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \implies w \in A_{k_1} \quad \text{para algún } k_1.$$

$$\text{Pero } w \in \bigcup_{k=(k_1+1)}^{\infty} A_k \implies w \in A_{k_2} \quad \text{para algún } k_2 > k_1.$$

$$\text{De la misma forma, } w \in \bigcup_{k=(k_2+1)}^{\infty} A_k \implies w \in A_{k_3} \quad \text{para algún } k_3 > k_2 > k_1.$$

De esta manera, se obtiene una sucesión creciente de enteros positivos

$$k_1 < k_2 < \dots < k_n < \dots$$

tales que $w \in A_{k_i} \quad \forall i$, entonces w pertenece a infinitos A_n .

Definición. Dada una sucesión de sucesos A_1, A_2, \dots en el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$, se define el límite inferior de los $\{A_i\}$ como

$$A_\infty := \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k.$$

Se puede ver que

$$A_\infty = \{w/w \text{ pertenece a todos salvo un número finito de los } A_n\}.$$

En efecto:

$$\text{Si } w \in A_\infty \implies w \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \implies w \in \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \text{ para algún } n,$$

$$\text{entonces } w \in A_k \quad \forall k \geq n.$$

Lema de Borel-Cantelli. Sean A_1, A_2, \dots sucesos en el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$:

- a) Si $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$, entonces $P(A^\infty) = 0$.
- b) Si $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$ y los A_n son independientes, entonces $P(A^\infty) = 1$.

Demostración.

a)

$$\text{Si } \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n}^{\infty} P(A_k) = 0.$$

$$\text{Pero } A^\infty \subset \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \quad \forall n \implies P(A^\infty) \leq P\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=n}^{\infty} P(A_k) \quad \forall n.$$

Entonces,

$$P(A^\infty) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n}^{\infty} P(A_k) = 0.$$

b)

Usaremos la siguiente propiedad: si $E_1 \supset E_2 \supset E_3 \dots$ es una familia decreciente de sucesos entonces,

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(E_n).$$

$$P(A^\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k^c\right).$$

Basta probar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k^c\right) = 0.$$

$$P\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k^c\right) = \lim_{m \rightarrow \infty} P\left(\bigcap_{k=n}^m A_k^c\right) = \lim_{m \rightarrow \infty} \prod_{k=n}^m P(A_k^c),$$

por la independencia de los A_n . Además,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \prod_{k=n}^m P(A_k^c) = \lim_{m \rightarrow \infty} \prod_{k=n}^m (1 - P(A_k)) = \prod_{k=n}^{\infty} (1 - P(A_k)).$$

Usando que $\forall 0 \leq p \leq 1$, $1 - p \leq e^{-p}$, resulta:

$$P\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k^c\right) \leq \prod_{k=n}^{\infty} e^{-P(A_k)} = e^{-\sum_{k=n}^{\infty} P(A_k)}.$$

Entonces,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k^c\right) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-\sum_{k=n}^{\infty} P(A_k)} = 0$$

y queda demostrado el lema.

Propiedad. 1) Si $\{A_n\}$ es una sucesión creciente, es decir si $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \dots$, entonces:

$$A_\infty = A^\infty = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

2) Si $\{A_n\}$ es una sucesión decreciente, es decir si $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \dots$, entonces:

$$A_\infty = A^\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Demostración. Ejercicio.

Observación. La parte b) del Lema de Borel-Cantelli no es necesariamente cierta si los A_n no son independientes. Por ejemplo, si $A_n = A \quad \forall n$, y $0 < P(A) < 1$, entonces $\sum P(A_n) = \infty$, pero

$$A^\infty = A \implies P(A^\infty) < 1.$$

Ejemplo. Se arrojan monedas repetidamente. Sea p_n la probabilidad del suceso A_n : "cara en el n-ésimo lanzamiento".

Si $\sum p_n = \infty$, la probabilidad de obtener cara infinitas veces ($P(A^\infty)$) es 1, pero si $\sum p_n < \infty$, esa probabilidad es 0.

Si, por ejemplo, la moneda es siempre la misma, $\sum p_n = \sum p = \infty$ y por lo tanto $P(A^\infty) = 1$. Si, en cambio,

$$p_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \implies \sum p_n < \infty \implies P(A^\infty) = 0.$$

Bibliografía. B. James, (1981) Probabilidade: Um curso em Nível Intermediário. Págs 197–200.