Propiedades de falta de memoria

Distribución geométrica: a) Sea $X \sim G(p)$, $0 < p < 1$.

$$P(X \geq s+t / X > t) = P(X \geq s) \qquad \forall s,t \ \in N \tag{1}$$

b) Mostrar que si X es una v.a. a valores naturales que satisface (1), X tiene distribución geométrica de parámetro $p := P(X = 1)$.

Demostración: a)

$$P(X \geq s+t / X > t) = \frac{P(X \geq s+t \ \wedge \ X > t)}{P(X > t)} = \frac{P(X \geq s+t)}{P(X > t)} =$$

$$= \frac{P(X > s+t-1)}{P(X > t)} = \frac{(1-p)^{s+t-1}}{(1-p)^t} = (1-p)^{s-1} = P(X > s-1) = P(X \geq s).$$

b) Sabemos que $\forall s,t \in N$, $P(X \geq s+t / X > t) = P(X \geq s)$. En particular, si $t = 1$, $P(X \geq s+1 / X > 1) = P(X \geq s) \quad \forall s \in N$ y, llamando $p := P(X = 1)$,

$$P(X \geq s+1) = P(X > 1)\, P(X \geq s) = (1-p)\, P(X \geq s) \quad \forall s \in N \tag{2}$$

Del mismo modo,

$$P(X \geq s+2) = (1-p)\, P(X \geq s+1) \quad \forall s \in N \tag{3}$$

y restando miembro a miembro (2) y (3),

$$P(X = s+1) = (1-p) P(X = s) \qquad \forall s \in N.$$

Se obtiene en forma recursiva,

$$P(X = 2) = (1-p)\, p$$

$$P(X = 3) = (1-p)^2\, p$$

y, en general, $P(X = n) = (1-p)^{n-1}\, p \quad \forall\, n \in N$, es decir $X \sim G(p)$.

Distribución exponencial: a) Sea $X \sim E(\lambda)$, $\lambda > 0$.

$$P(X > s + t/X > t) = P(X > s) \qquad \forall s, t > 0 \qquad (4)$$

b) Mostrar que si X es una v.a. a valores reales positivos que satisface (4), X tiene distribución exponencial de parámetro λ para algún $\lambda > 0$.

Demostración: a)

$$P(X > s + t/X > t) = \frac{P(X > s + t \wedge X > t)}{P(X > t)} = \frac{P(X > s + t)}{P(X > t)} =$$

$$= \frac{1 - F_X(s + t)}{1 - F_X(t)} = \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda(t)}} = e^{-\lambda(s)} = P(X > s).$$

b) Sea $G(x) = P(X > x)$, G es monótona no creciente, continua a derecha y satisface

$$lim_{x \to \infty} G(x) = 0 \qquad lim_{x \to -\infty} G(x) = 1.$$

La propiedad (4) equivale a

$$G(s + t) = G(s)\, G(t).$$

En primer lugar, probaremos que $0 < G(1) < 1$. Como $G(n) = [G(1)]^n$, si

$$G(1) = 1 \Longrightarrow lim_{n \to \infty} G(n) = 1$$

lo cual es un absurdo. Por otro lado, como $G(\frac{1}{n}) = [G(1)]^{1/n}$, si

$$G(1) = 0 \Longrightarrow lim_{n \to \infty} G(1/n) = 0$$

lo cual también es un absurdo. Por lo tanto, existe $\lambda > 0$, tal que

$$G(1) = e^{-\lambda}.$$

Sea $q \in Q^+$ (racional positivo), entonces $q = m/n$ con m y n naturales y

$$G(q) = G(m/n) = [G(1/n)]^m = [G(1)]^{m/n} = [G(1)]^q.$$

Sea $t \in R^+$ (real positivo), existen dos sucesiones racionales positivas $\{q_k\}$ y $\{q_k^*\}$, tales que $q_k \downarrow t$ y $q_k^* \uparrow t$, entonces

$$G(q_k^*) \geq G(t) \geq G(q_k) \qquad \forall k$$

$$[G(1)]^{q_k^*} \geq G(t) \geq [G(1)]^{q_k} \qquad \forall k.$$

Tomando límite,

$$lim_{k\to\infty}[G(1)]^{q_k^*} \geq G(t) \geq lim_{k\to\infty}[G(1)]^{q_k} \qquad \forall k,$$

y por lo tanto,

$$G(t) = [G(1)]^t = e^{-\lambda t} \qquad \forall t > 0.$$

Finalmente, resulta

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x} \quad \forall x > 0 \Longrightarrow X \sim E(\lambda).$$