Proceso de Poisson

Un uso muy frecuente de la distribución de Poisson surge en situaciones en las cuáles los "eventos" ocurren a lo largo del tiempo, por ejemplo: ocurrencia de terremotos, personas que ingresan a un banco, emisiones de partículas por una fuente radiactiva.

Supóngase que los eventos ocurren en ciertos instantes (aleatorios) de tiempo y que, para una constante λ positiva se satisface:

1) La probabilidad que ocurra exactamente un evento en un intervalo dado de longitud h es igual a $\lambda\, h + o(h)$, donde $o(h)$ es cualquier función $f(h)$ tal que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h)}{h} = 0.$$

(Por ejemplo, $f(h) = h^2$ es $o(h)$, pero $f(h) = h$ no lo es)

2) La probabilidad que ocurran dos o más eventos en un intervalo dado de longitud h es igual a $o(h)$.

3) $\forall n$, $\forall j_1, \dots, j_n$ y cualquier conjunto de n intervalos disjuntos, se define el suceso E_i: "exactamente j_i eventos ocurren en el i–ésimo intervalo", entonces los sucesos $E_1, \dots E_n$ son independientes.

Teorema: Bajo las hipótesis **1)**, **2)** y **3)**, el número de eventos que ocurren en un intervalo de longitud t es una v.a. con distribución $P(\lambda\, t)$.

Demostración:

Sea $[0, t]$ el intervalo considerado y $N(t)$ el número de eventos que ocurren en ese intervalo. Dividamos el $[0, t]$ en n subintervalos no yuxtapuestos, cada uno de longitud t/n:

$$0 \qquad \frac{t}{n} \qquad \frac{2t}{n} \qquad\qquad\qquad \frac{nt}{n} = t$$

Sea $k \leq n$, podemos considerar la siguiente partición: A: "k subintervalos contienen exactamente 1 evento y los otros $n-k$ no contienen ninguno" y B: "al menos un subintervalo contiene 2 o más eventos". Entonces:

$$P(N(t)=k) = P((N(t)=k)\cap A) + P((N(t)=k)\cap B).$$

Sea C_i el suceso "el i–ésimo subintervalo contiene 2 o más eventos", entonces

$$P((N(t)=k)\cap B) \leq P(B) = P(\bigcup_{i=1}^{n} C_i)$$

y

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} C_i) \leq \sum_{i=1}^{n} P(C_i) = \sum_{i=1}^{n} o(t/n) = n\, o(t/n) = t\, \frac{o(t/n)}{t/n}.$$

Ahora, si $n \to \infty$, $t/n \to 0$, entonces $\frac{o(t/n)}{t/n} \to 0$ y por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} P(\bigcup_{i=1}^{n} C_i) = 0.$$

Por otro lado,

$$P((N(t)=k)\cap A) = P(A) = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \left[\frac{\lambda\, t}{n} + o\left(\frac{t}{n}\right)\right]^k \left[1 - \frac{\lambda\, t}{n} - o\left(\frac{t}{n}\right)\right]^{n-k}.$$

Entonces

$$P((N(t)=k)\cap A) = \underbrace{\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k\, k!}}_{G} \underbrace{\left[\lambda\, t + t\,\frac{o(t/n)}{t/n}\right]^k}_{H} \underbrace{\left[1 - \frac{\lambda\, t}{n} - o\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n}_{I} \underbrace{\left[1 - \frac{\lambda\, t}{n} - o\left(\frac{t}{n}\right)\right]^k}_{J}.$$

Cuando n tiende a infinito,

$$G \to \frac{1}{k!},$$
$$H \to (\lambda\, t)^k,$$

$$I = \left\{ \left[1 - \frac{\lambda\, t}{n} - o\left(\frac{t}{n}\right) \right]^{n/t} \right\}^{t} = \left\{ \left[1 - \frac{\lambda}{n/t} - o\left(\frac{t}{n}\right) \right]^{n/t} \right\}^{t} \to e^{-\lambda\, t}$$

y,

$$J \to 1.$$

Por lo tanto, haciendo tender n a infinito, se obtiene

$$P(N(t) = k) = \frac{e^{-\lambda\, t}\, (\lambda\, t)^{k}}{k!}.$$