PROBABILIDADES

Trabajo Práctico 2

1. Dar un espacio muestral adecuado para cada uno de los siguientes experimentos:

a) Se arroja un dado equilibrado dos veces.

b) Se arroja un dado equilibrado hasta que aparece el primer as.

c) De una caja que contiene 5 bolillas numeradas del 1 al 5, se extraen dos bolillas

i) con reposición

i) sin reposición.

d) Se elige al azar un punto en el círculo unitario.

2. Se arroja dos veces un dado equilibrado. Sean los sucesos:

A: la suma de los puntos es par

B: la suma de los puntos es exactamente 8

C: ambos resultados son distintos

Explicitar el espacio muestral y calcular las probabilidades de A, B, C, $A \cup B$, $A \cap B$, $A \cap C$, $A \setminus C$.

3. En un placard hay n pares de zapatos. Si se eligen al azar $2r$ zapatos (con $2r < n$), calcular la probabilidad de que

a) no haya ningún par completo.

b) haya exactamente un par completo.

c) haya exactamente dos pares completos.

4. Al colocar 6 productos distintos en sus envases, un operario se ha equivocado en 3 de ellos. Si un supervisor revisa uno a uno los envases ¿Cuál es la probabilidad de que

a) los 3 primeros envases revisados contengan los productos equivocados?

b) necesite revisar i envases (i=4,5,6) para encontrar los 3 que contienen los productos equivocados?

5. Una compañía constructora trabaja en dos proyectos diferentes. Sea A el evento: "el primero de los proyectos se termina en la fecha del contrato" y definamos análogamente B para el segundo proyecto. Si $P(A \cup B) = 0.9$ y $P(A \cap B) = 0.5$, ¿cuál es la probabilidad de que exactamente un proyecto se termine para la fecha de contrato?

6. a) Enunciar y demostrar una fórmula para

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4)$$

b) Cuatro matrimonios deciden bailar un tango, eligiendo los hombres su compañera de baile al azar, ¿Cuál es la probabilidad de que el hombre i elija a su esposa como compañera de baile? (i=1,2,3,4)

c) En el problema b), ¿Cuál es la probabilidad de que al menos un hombre elija a su esposa como compañera de baile?

7. De un bolillero que contiene 5 bolillas numeradas 1, 2, 3, 4, 5 se extrae una al azar, sea la número k. Se eliminan las bolillas cuyo número es mayor que k de la urna y se hace una segunda extracción al azar entre las bolillas 1 a k, sea la número j. Se eliminan las bolillas cuyo número es mayor que j de la urna y se hace una tercera extracción al azar entre las bolillas 1 a j.

a) Describir un espacio muestral adecuado para este experimento y determinar el número de elementos que posee.

b) ¿Es razonable suponer equiprobabilidad en este espacio? ¿Qué probabilidad le asignaría al (3,2,1)?

8. Un bolillero contiene N bolillas numeradas 1,2,...,N. Se sacan una a una n bolillas ($1 \leq n \leq N$), sin reposición. Sean m y k enteros tales que $1 \leq m \leq N$ y $1 \leq k \leq n$. Hallar la probabilidad de que

a) se extraiga la bolilla m en la k–ésima extracción

b) se extraiga la bolilla m

c) el máximo número obtenido sea $\leq m$

d) el máximo número obtenido sea m

e) $a \leq M \leq b$, siendo M el máximo número obtenido y a y b dos números naturales dados, $a < b$

f) los números de las bolillas extraídas, en el orden en que fueron extraídas, constituyan una sucesión estríctamente monótona.

9. Resolver el ejercicio 8 en el caso en que cada bolilla obtenida sea devuelta a la urna.

10. De un bolillero que contiene B bolillas blancas y N negras se extraen sucesivamente y sin reposición n bolillas, $1 \leq n \leq B + N$

a) hallar la probabilidad de que la k-ésima bolilla extraída, $1 \leq k \leq n$, sea

  i) blanca

  ii) la primer blanca obtenida

b) para $k = n$, sea p_n la probabilidad obtenida en a) ii). Probar que si B y N tienden a infinito de manera que $p = \frac{B}{B+N}$ permanezca constante, entonces

$$p_n \to p(1-p)^{n-1}$$

11. De un bolillero que contiene B bolillas blancas y N negras se extraen sucesivamente y sin reemplazo n bolillas, $1 \leq n \leq B+N$. Hallar la probabilidad p_k de obtener k bolillas blancas. Probar que si B y N tienden a infinito de manera que $p = \frac{B}{B+N}$ permanezca constante, entonces

$$p_k \to \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

12. Consideremos el caso en que se toma una muestra aleatoria con reposición de tamaño r de una población de n elementos: $a_1, ...a_n$ (supongamos equiprobabilidad). Sea A el suceso: ”en la muestra obtenida: $a_{j_1}, ...a_{j_r}$ no hay elementos repetidos”,

a) calcular P(A)

b) Los cumpleaños de r personas forman una muestra de tamaño r de la población de todos los días del año. Si bien los años no son todos iguales en longitud, y sabemos que los porcentajes de nacimientos no son constantes a través del año, como una primera aproximación podemos considerar que una elección al azar de personas es equivalente a una selección al azar de las fechas de nacimiento y que el año es de 365 días. Hallar la probabilidad de que entre r personas elegidas al azar todas ellas tengan distintas fechas de cumpleaños.

   El resultado numérico es sorprendente. Por ejemplo, para $r = 23$, $p < \frac{1}{2}$, o sea que entre 23 personas la probabilidad de que al menos 2 cumplan años el mismo día es mayor que 0.50.

c) Hallar la probabilidad de que si n bolillas distintas se distribuyen al azar en n cajas, estén todas las cajas ocupadas.

13*. Se lanza un dado n veces. Hallar la probabilidad de que la suma de los puntos de exactamente k.

(Hint: hallar el coeficiente de x^k en el desarrollo de $(x + x^2 + ... + x^6)^n$)