

## PROBABILIDADES

### Trabajo Práctico 4

1. a) Sea  $X$  una variable aleatoria (v.a) con función de distribución acumulada

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 0.3 & \text{si } 1 \leq x < 3 \\ 0.4 & \text{si } 3 \leq x < 6 \\ 0.6 & \text{si } 6 \leq x < 12 \\ 1 & \text{si } x \geq 12 \end{cases}$$

y sean  $A = [3, 6]$  y  $B = [4, \infty)$ . Calcular  $P(A)$ ,  $P(B)$  y  $P(A/B)$ .

- b) Sea  $X$  una v.a. con función de distribución acumulada

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -3 \\ \frac{1}{4} & \text{si } -3 \leq x < 1 \\ \frac{3}{4} & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

y sean  $A = [-3, 1]$  y  $B = (\frac{1}{2}, 3)$ . Calcular  $P(A)$ ,  $P(B)$ ,  $P(B/A)$  y  $P(B/A^c)$ .

- c) En ambos casos, calcular la función de probabilidad puntual de la v.a.  $X$ .

2. Si el espacio muestral  $\Omega$  es un conjunto infinito, ¿implica esto necesariamente que cualquier v.a.  $X$  definida sobre  $\Omega$  tendrá un conjunto infinito de valores posibles?. Si la respuesta es afirmativa, aclarar por qué; en caso contrario, dar un ejemplo.

3. Se dispone de dos dados, uno equilibrado y el otro cargado de manera tal que los números 1 y 2 tienen probabilidad  $\frac{1}{3}$  y los restantes  $\frac{1}{12}$ . Se elige un dado al azar y se arroja tres veces. Sea  $X$  = "número de veces que sale 1 ó 2".

- a) Hallar la función de probabilidad puntual de  $X$ .

- b) Dado que  $X = 3$ , ¿cuál es la probabilidad de que se haya elegido el dado cargado?

4. De un conjunto de 7 mujeres y 4 varones se eligen al azar 5 personas. Sea  $X$  el número de varones elegidos.

- a) Hallar la función de probabilidad puntual de  $X$  y graficarla.

- b) Hallar la función de distribución acumulada.

- c) ¿Cuál es la probabilidad de que el grupo elegido esté formado por al menos 3 varones?

**5.** Se arroja una moneda equilibrada hasta que aparece por primera vez el mismo resultado 2 veces consecutivas.

- a) Describir un espacio muestral adecuado para este experimento y asignar probabilidad a los eventos elementales.
- b) Hallar la función de probabilidad puntual de la v.a.  $X =$  "número de tiradas necesarias".
- c) Hallar la probabilidad de que
  - i. el experimento termine antes de la sexta tirada.
  - ii. se requiera un número par de tiradas.

**6.** Se dispone de dos urnas con 5 bolillas cada una. En la urna A hay dos bolillas blancas y tres negras y en la urna B hay una bolilla blanca y cuatro negras. Se tira un dado equilibrado. Si el resultado es múltiplo de 3, se sacan dos bolillas sin reposición de la urna A, y en caso contrario las extracciones se hacen de la urna B.

Sea  $X$  el número de bolillas blancas extraídas. Hallar las funciones de probabilidad puntual y de distribución correspondientes a la v.a.  $X$ .

**7.** Sobre el escritorio de una secretaria hay 4 cartas y sus correspondientes sobres. La secretaria introduce las cartas en los sobres al azar.

Sea  $X =$  "número de cartas correctamente introducidas".

Hallar las funciones de probabilidad puntual y de distribución correspondientes a la v.a.  $X$ .

**8.** En una fábrica, el 2% de las piezas que se fabrican son defectuosas. Se toma una muestra con reposición de tamaño  $n$ . Hallar

- a) la probabilidad de que no haya ninguna defectuosa en la muestra.
- b) la probabilidad de que haya más buenas que defectuosas.
- c) la probabilidad de que haya al menos 2 defectuosas.
- d) el número más probable de piezas defectuosas en la muestra cuando  $n = 4$  y  $n = 100$ .

**9.** En una sucesión de ensayos de Bernoulli con probabilidad  $p$  de éxito, hallar la probabilidad de que ocurran  $A$  éxitos antes de  $B$  fracasos.

Sugerencia: El problema se resuelve después de no más de  $A + B - 1$  ensayos. Este problema contesta la pregunta acerca de la manera de dividir la apuesta cuando el juego se interrumpe en el momento en que a un jugador le faltan  $A$  puntos para ganar y al otro le faltan  $B$  puntos.

**10.** Un experimento consiste en tirar un dado equilibrado hasta obtener el primer as. Sea  $X$  el número de tiradas necesarias.

- a) Hallar las funciones de probabilidad puntual y de distribución de la v.a.  $X$ .
- b) Calcular la probabilidad de que sean necesarias un número par de tiradas.
- c) Sea  $Y$  la v.a. que cuenta el número de tiradas necesarias hasta obtener el tercer as. Obtener la función de probabilidad de  $Y$  (distribución binomial negativa).

**11.** Sea  $X$  una v.a. con distribución geométrica de parámetro  $p$  ( $0 < p < 1$ ).

- a) Probar que para todo número natural  $k$ ,

$$P(X > k) = (1 - p)^k$$

- b) Verificar que si  $s$  y  $t$  son números naturales, entonces

$$P(X \geq s + t | X > t) = P(X \geq s)$$

Esta propiedad se denomina "falta de memoria".

- c) Mostrar que la única distribución discreta con esta propiedad es la geométrica de parámetro  $p = P(X = 1)$ .

**12.** Para verificar si se cumplen las normas establecidas para arrojar residuos al río Reconquista, un inspector visita al azar 10 de las 50 industrias establecidas a orillas de dicho río.

- a) Si en realidad 35 industrias no cumplen con alguna de las normas, ¿cuál es la función de probabilidad puntual de la v.a.  $X$  = "número de industrias que están en infracción"?
- b) Si hay 500 industrias establecidas, de las cuáles 350 están en infracción, aproximar la función de probabilidad puntual hallada en a) por una más simple.

**13.** Un comprador de componentes eléctricos los adquiere en lotes de tamaño 10. Antes de comprar un lote, inspecciona 3 componentes elegidos al azar del mismo y lo acepta si ninguno de los componentes seleccionados tiene fallas. Si el 30% de los lotes tienen 4 componentes defectuosos y el 70 % sólo tiene 1 componente defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que el comprador rechace un lote?

**14.** Sea  $X$  una v.a. con distribución de Poisson de parámetro  $\lambda$ .

- a) Mostrar que  $P(X = i)$  crece en forma monótona en función de  $i$  y luego decrece, alcanzando su máximo cuando  $i$  es el mayor entero menor o igual que  $\lambda$ .

Sugerencia: Considerar  $P(X = i) / P(X = i - 1)$ .

- b) Hallar el valor de  $\lambda$  que maximiza  $P(X = k), k \geq 0$ .

**15.** En un concurso de pesca cada pescador paga 100\$ por participar. La cantidad de peces que cada pescador puede obtener durante el desarrollo del concurso es una v.a. con distribución de Poisson de parámetro  $\lambda = 4.5$ . Cada pescador tiene permitido cobrar a lo sumo 8 piezas. Hay un premio de 50\$ por cada pieza.

Calcular la función de probabilidad puntual de la ganancia neta.

**16.** Un minorista ha verificado que la demanda semanal de cajones de cierto producto es una v.a. con distribución de Poisson de parámetro  $\lambda = 2$ . Completa su existencia los lunes por la mañana de manera de tener 4 cajones al principio de la semana. Al efectuar un análisis de la actividad de su negocio, se le plantean las siguientes preguntas:

- a) ¿Cuál es la probabilidad de vender todo su stock durante la semana?
- b) ¿Cuál es la probabilidad de que sea incapaz de cumplir con un pedido por lo menos?
- c) ¿Cuál es la distribución del número de cajones vendidos en una semana?
- d) ¿Con cuántos cajones debería iniciar la semana a fin de que la probabilidad de cumplir con todos sus pedidos fuese mayor o igual que 0.99?
- e) ¿Cuál es el número más probable de cajones pedidos en una semana?

**17.** El número de personas que entran a un casino constituye un proceso de Poisson de intensidad  $\lambda = 1$  persona cada 2 minutos.

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que no entre ninguna persona entre las 12:00 y las 12:06?
- b) ¿Cuál es la probabilidad de que entren al menos 4 personas en el mismo período?