PROBABILIDADES

Trabajo Práctico 5

1. Sea X una variable aleatoria con función de distribución acumulada

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{8}\, x^3 & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

a) Calcular, usando F_X ,

$P(X \leq 1)$

$P(0.5 \leq X \leq 1)$

$P(X > 1.5)$

b) Hallar la mediana de esta distribución.

c) Hallar la función de densidad f_X .

2. El diámetro D, expresado en dm, del tronco de cierta especie de árboles es una v.a. con función de densidad

$$f_D(x) = k\ x\ I_{(0,10)}(x)$$

a) Hallar el valor de la constante k .

b) ¿Cuál es la probabilidad de que el diámetro de un árbol de esa especie mida entre 4 y 6 dm?.

c) ¿Cuál es la probabilidad de que el diámetro de un árbol de esa especie mida entre 4 y 6 dm, si se sabe que es mayor de 5 dm?

d) En un área del bosque hay 3 árboles de esa especie. Suponiendo independencia entre los distintos diámetros, calcular la probabilidad de que exactamente 2 de ellos tengan un diámetro que mida entre 4 y 6 dm.

e) ¿Cuántos árboles habría que muestrear para que la probabilidad de encontrar al menos uno cuyo diámetro mida entre 4 y 6 dm, sea mayor o igual que 0.99?

3. Sea X una v.a. con función de densidad:

$$f_X(x) = \begin{cases} c\, x\,(1-x) & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

a) Hallar la función de distribución de X .

b) Calcular $P(X \leq \frac{1}{2} \,/\, \frac{1}{3} \leq X \leq \frac{2}{3})$.

4. La fracción de alcohol X en cierto compuesto puede considerarse una v.a. con función de densidad

$$f_X(x) = c\,(1-x)\; I_{[0,1]}(x)$$

a) Hallar el valor de la constante c.

b) Supóngase que el precio de venta del compuesto depende del contenido de alcohol, de la siguiente manera: si $X < \frac{1}{3}$ el precio es 1 \$, si $\frac{1}{3} \le X \le \frac{2}{3}$ el precio es 2 \$ y si $X > \frac{2}{3}$, el precio es 3 \$. Hallar la distribución del precio del compuesto.

5. Se dice que una v.a. X tiene distribución simétrica respecto de θ si y sólo si:

$$P(X \le \theta - h) = P(X \ge \theta + h) \qquad \text{para todo } h > 0$$

a) Dar dos ejemplos de v.a. con distribución simétrica, una discreta y otra continua.

b) Sea X una v.a. continua, probar que son equivalentes:

   i. X tiene distribución simétrica respecto de θ
   ii. $P(X \le x) = P(X \ge 2\,\theta - x)$
   iii. $F_X(x) = 1 - F_X(2\,\theta - x)$
   iv. $f_X(x) = f_X(2\,\theta - x)$
   v. $f_X(\theta - x) = f_X(\theta + x)$.

6. Sea Z una v.a con distribución $N(0,1)$, calcular:

a) $P(0 \le Z \le 2)$

b) $P(|Z| \le 2.5)$

c) $P(Z \ge -1.3)$

d) c tal que $P(Z < c) = 0.98$

e) c tal que $P(|Z| < c) = 0.90$

f) el valor Z_α, para $\alpha = 0.05$, 0.01 y 0.001.

7. Sea X una v.a con distribución $N(\mu, \sigma^2)$,

a) Hallar la distribución de la v.a.

$$Y = \frac{X - \mu}{\sigma}.$$

b) Si $\mu = 5$ y $\sigma = 0.5$, calcular

   i. $P(4.75 \le X \le 5.50)$
   ii. $P(|X| > 5.25)$

iii. c tal que $P(|X-5| \leq c) = 0.90$

iv. el 0.90–percentil de X.

8. Se supone que en una cierta población humana, el índice cefálico I (anchura del cráneo expresada como porcentaje de su longitud) se distribuye normalmente. Si hay un 58 % de individuos con $I \leq 75$, un 38 % con $75 < I \leq 80$ y un 4 % con $I > 80$, hallar la función de densidad de la v.a. I y calcular $P(78 \leq I \leq 82)$.

9. Se desarrolló una estrategia de decisión para optimizar ganancias eligiendo entre dos acciones distintas I y II con probabilidades 0.35 y 0.65, respectivamente. La rentabilidad de la acción I es una v.a. con distribución $N(1.9, 0.16)$ y la de la acción II es una v.a. con distribución $N(2.2, 0.09)$.

a) Hallar la probabilidad de que la rentabilidad de la estrategia desarrollada sea mayor o igual que 2.1.

b) Dado que la rentabilidad es mayor o igual que 2.1, hallar la probabilidad de que se haya seleccionado la acción I.

10. La vida útil (en meses) de un componente electrónico es una v.a. V con distribución exponencial, tal que $P(V > 20) = 0.449$.

a) Hallar la probabilidad de que la vida útil de uno de estos componentes sea mayor de 10 meses.

b) Un sistema consta de 5 componentes electrónicos conectados en serie. Al fallar uno cualquiera de éstos, se desconecta el sistema. Se supone que los tiempos de vida de los componentes son independientes, o sea que si se definen los eventos:

A_i = "el i–ésimo componente dura hasta el instante t", con $1 \leq i \leq 5$,

estos eventos son independientes.

Sea X el tiempo en el cual el sistema falla.

i. Escribir el evento $\{X \geq t\}$ en función de los A_i.

ii. Usando la independencia de los A_i, calcular $P(X \geq t)$.

iii. Hallar la función de distribución y la función de densidad de la v.a. X.

11. La confiabilidad de un componente (o sistema) en el tiempo t, $R(t)$, está definida como $R(t) = P(T > t)$, donde T es la duración del componente (una variable aleatoria, con función de densidad $f_T(t)$ y función de distribución $F_T(t)$).

a) Exprese la función de confiabilidad $R(t)$, en términos de la función de distribución de la v.a. T, $F_T(t)$.

b) Exprese la función de confiabilidad $R(t)$, en términos de la función de densidad de la v.a. T, $f_T(t)$.

c) Explique porqué a la función $Z(t) = f_T(t)/R(t)$, se la suele denominar tasa de riesgo, o tasa de falla instantánea.

d) Si se sabe que la tasa de riesgo es una constante $a > 0$, halle la función de densidad subyacente, $f_T(t)$.

12. Dado un proceso de Poisson de intensidad λ, sea T el tiempo de espera hasta la primera ocurrencia del evento a partir del instante inicial. Probar que T tiene distribución exponencial de parámetro λ.

13 *. Sea X una v.a. con distribución Gamma de parámetros n y λ (n natural y $\lambda > 0$), o sea con función de densidad:

$$f_X(x) = \frac{\lambda^n \, x^{n-1} \, e^{-\lambda x}}{(n-1)!} \; I_{(0,\infty)}(x)$$

Probar que:

$$F_X(x) = P(Y \geq n)$$

donde $Y \sim P(\lambda \, x)$.

14. Sea Z una v.a. con distribución $N(0,1)$. Probar que Z^2 tiene distribución $\Gamma(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. (Esta distribución recibe el nombre χ^2 con un grado de libertad)

15 *. Sea X una v.a. con distribución exponencial de parámetro 2. Sea $Y = [X]$ (parte entera de X). Hallar la distribución de la v.a. Y.

16. Se dice que una v.a. X tiene distribución logarítmica normal de parámetros μ y σ^2 ($X \sim LN(\mu, \sigma^2)$) si su densidad es

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \, x \sqrt{2\,\pi}} \exp\Big[-\frac{1}{2}\Big(\frac{\ln x - \mu}{\sigma}\Big)^2\Big] \; I_{[0,\infty)}(x)$$

Comprobar que si $X \sim LN(\mu, \sigma^2)$, entonces $Y = \ln X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

17. Se dice que una v.a. X tiene distribución Weibull de parámetros ν, α y β ($X \sim W(\nu, \alpha, \beta)$), con $\alpha > 0, \beta > 0$, si su densidad es

$$f(x) = \frac{\beta}{\alpha}\Big(\frac{x-\nu}{\alpha}\Big)^{\beta-1} \exp\Big[-\Big(\frac{x-\nu}{\alpha}\Big)^{\beta}\Big] \; I_{(\nu,\infty)}(x)$$

a) Probar que si $X \sim W(\nu, \alpha, \beta)$, entonces $Y = (\frac{X-\nu}{\alpha})^{\beta}$ tiene distribución exponencial de parámetro 1.

b) Sean a y b mayores que ν, sea $X \sim W(\nu, \alpha, \beta)$ y sea

$$G(a,b) = P(X \geq (a+b)/X \geq a).$$

Probar que:

i. si $\beta > 1$, entonces $G(a,b)$ es una función decreciente de a (Propiedad de "desgaste").

ii. si $\beta < 1$, entonces $G(a,b)$ es una función creciente de a.

18. Se dice que una v.a. X tiene distribución logística de parámetros μ y τ ($X \sim L(\mu, \tau)$), con $\tau > 0$, si su densidad es

$$f_X(x) = \frac{\exp(\frac{x-\mu}{\tau})}{\tau[1 + \exp(\frac{x-\mu}{\tau})]^2}$$

y se dice que una v.a. Y tiene distribución loglogística de parámetros κ, λ, $\kappa > 0, \lambda > 0$ ($Y \sim LL(\kappa, \lambda)$), si su densidad es

$$f_Y(y) = \frac{\kappa\, y^{\kappa-1}\, \lambda^\kappa}{[1 + (y\lambda)^\kappa]^2}\; I_{[0,\infty)}(y)$$

Probar que si $Y \sim LL(\kappa, \lambda)$, entonces $X = \kappa \ln(\lambda Y)$ tiene distribución logística.

19. Sea X una v.a. con distribución $U(0,1)$. Hallar las funciones de distribución y de densidad de las siguientes variables aleatorias.

a) $cX + d$

b) X^α, siendo α un número real

c) $\ln X$

d) $\frac{X}{X+1}$

e) $-\frac{1}{\lambda}\ln(1-X)$, siendo $\lambda > 0$.

20. Generación de números al azar

a) Usando el ejercicio 19 a), generar, a partir de una muestra aleatoria de variables con distribución $U(0,1)$, una muestra aleatoria de variables con distribución $U(3,8)$.

b) Usando el ejercicio 19 e), generar, a partir de una muestra aleatoria de variables con distribución $U(0,1)$, una muestra aleatoria de variables con distribución exponencial de parámetro 10.

c) Generar, a partir de una muestra aleatoria de variables con distribución $U(0,1)$, una muestra aleatoria de variables con la siguiente distribución uniforme discreta:

$$p_X(k) = \frac{1}{100} \qquad \text{si} \ \ k = 0, 1, ..., 99.$$

d) Generar, a partir de una muestra aleatoria de variables con distribución $U(0,1)$, una muestra aleatoria de variables con distribución $Bi(1, 1/3)$.

e*) Generar, a partir de una muestra aleatoria de variables con distribución $U(0,1)$, una muestra aleatoria de variables con distribución de Poisson de parámetro 5.

21. a) Sea X una v.a. con función de distribución

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x}{4} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{3} & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ \frac{x}{6} & \text{si } 2 \leq x < 4 \\ \frac{x}{8} + \frac{1}{4} & \text{si } 4 \leq x < 6 \\ 1 & \text{si } x \geq 6 \end{cases}$$

i. Graficar esta función de distribución. ¿La v.a. X es discreta o continua?

ii. Sean $A = [1, 5]$ y $B = (\frac{1}{2}, 3)$, calcular $P(A)$, $P(B/A)$ y $P(B/A^c)$.

b) Sea X una v.a. con función de densidad

$$f(x) = \frac{2}{9}\, x\, I_{(0,3)}(x)$$

y sea

$$h(t) = \begin{cases} t & \text{si } t < 1 \\ 1 & \text{si } 1 \leq t \leq 2 \\ 3 - t & \text{si } t > 2 \end{cases}$$

Hallar la función de distribución de la v.a. $Y = h(X)$, y expresarla como combinación convexa de dos funciones de distribución, una correspondiente a una v.a. continua y otra a una v.a. discreta.