

PROBABILIDADES

Trabajo Práctico 6

1. a) Demostrar que la función

$$F(x, y) = \begin{cases} 1 - e^{-x-y} & \text{si } x \geq 0 \text{ e } y \geq 0 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

no es función de distribución de un vector aleatorio.

- b) Demostrar que la función

$$F(x, y) = \begin{cases} (1 - e^{-x})(1 - e^{-y}) & \text{si } x \geq 0 \text{ e } y \geq 0 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

si lo es.

2. De una urna que contiene 3 bolillas numeradas 1, 2 y 3, se extraen sin reposición y sucesivamente 2 bolillas. Sea X el número de la primer bolilla e Y el de la segunda.

a) Hallar p_{XY} , p_X , p_Y y F_{XY} .

b) Calcular $P(X < Y)$.

c) ¿Son X e Y independientes?

3. Se elige en forma aleatoria un par (X, Y) en el círculo de centro $(0, 0)$ y radio R (la probabilidad de que el par (X, Y) pertenezca a una subregión es proporcional al área de ésta).

a) Hallar la densidad conjunta del par (X, Y) .

b) Hallar la probabilidad de que la distancia del punto al centro del círculo sea menor que $R/2$.

c) Hallar las funciones de densidad marginal f_X y f_Y .

d) ¿Son X e Y independientes?

4. Se tira una moneda equilibrada 3 veces, siendo X el número de caras. Si $X = a$ se extraen sin reposición $a + 1$ bolillas de una urna que contiene 4 bolillas blancas y una roja. Sea Y el número de bolillas rojas extraídas.

a) Hallar la distribución de Y dado $X = a$ para $a = 0, 1, 2, 3$.

b) Obtener una tabla con la distribución conjunta del par (X, Y) . ¿Son X e Y independientes?

c) Hallar la función de probabilidad marginal p_Y .

d) Si no se extrajo ninguna bolilla roja, ¿cuál es la probabilidad de que hayan salido dos caras?

5. Sea X una v.a. con distribución $U(0,1)$. Si $X = x$, se elige un número Y entre 0 y x , o sea que $Y/X = x \sim U(0,x)$.
- Hallar la densidad conjunta del par (X,Y) .
 - Hallar la densidad marginal f_Y .
6. Sea (X,Y) un v.a. con distribución uniforme en el trapecio de vértices $(-6,0)$, $(-3,4)$, $(3,4)$ y $(6,0)$.
- Hallar la densidad conjunta del par (X,Y) y las funciones de densidad marginal f_X y f_Y .
 - ¿Son X e Y independientes?. Justificar.
7. Sean X e Y v.a. independientes. Probar que si:
- $X \sim Bi(n,p)$, $Y \sim Bi(m,p)$, entonces $X + Y \sim Bi(n+m,p)$.
 - $X \sim P(\lambda)$, $Y \sim P(\mu)$, entonces $X + Y \sim P(\lambda + \mu)$.
 - $X \sim G(p)$, $Y \sim G(p)$, entonces $X + Y \sim BN(2,p)$.
8. a) Sean X e Y v.a. independientes tales que $X \sim Bi(n,p)$ e $Y \sim Bi(m,p)$, probar que la distribución de X condicional a $X + Y = k$ es hipergeométrica, y especificar cuáles son sus parámetros.
- b) Sean X e Y v.a. independientes tales que $X \sim P(\lambda)$ e $Y \sim P(\mu)$, probar que la distribución de X condicional a $X + Y = k$ es binomial, y especificar cuáles son sus parámetros.
- c) Sea X una v.a. con distribución $P(\lambda)$ y sea Y una v.a. cuya distribución condicional a $X = k$ tiene distribución $Bi(k,p)$. Probar que la distribución de Y es $P(\lambda p)$.
9. Un laboratorio posee 14 ratas de la especie **A** y 16 de la especie **B** para realizar experimentación. La probabilidad de que cualquiera de ellas muera en un experimento es 0.1 y se considera que las muertes se producen en forma independiente.
- ¿Cuál es la probabilidad de que mueran más de 4 ratas?
 - Si murieron 2 ratas, ¿cuál es la probabilidad de que ambas hayan sido de la especie **A**?
10. El número de reclamos por errores en la facturación que recibe diariamente una oficina de una empresa de telefonía celular es una v.a. con distribución $P(5)$, mientras que el número de reclamos de otro tipo es una v.a. con distribución $P(15)$. Suponiendo independencia entre ambos tipos de reclamos,
- hallar la probabilidad de que en una día dado haya por lo menos 23 reclamos.
 - si un día dado hubo 18 reclamos, ¿cuál es la probabilidad de que 8 de ellos hayan sido por errores en la facturación?

11. El 5% de una población fuma cigarrillos negros, el 35% fuma cigarrillos rubios y el resto no fuma. Se realiza una encuesta a 35 personas y se definen: Y_1 = número de personas que no fuman, Y_2 = número de personas que fuman cigarrillos rubios e Y_3 = número de personas que fuman cigarrillos negros.

- a) Hallar la distribución de (Y_1, Y_2, Y_3) .
- b) Hallar la distribución de $(Y_1, Y_2 + Y_3)$.
- c) Hallar la distribución de $(Y_2 + Y_3)$.

12. La longitud (en cm) de ciertas varillas de metal tiene distribución $N(5, 0.25)$. Para hacer un control de calidad se eligen 40 varillas al azar de la producción total. Hallar la probabilidad de que:

- 9 varillas midan menos de 4 cm
- 7 varillas midan entre 4 y 4.8 cm
- 12 varillas midan entre 4.8 y 5.5 cm
- 12 varillas midan más de 5.5 cm

13. Sean X e Y v.a. independientes con distribución exponencial de parámetro λ . Probar que $X + Y$ y $\frac{X}{Y}$ son independientes.

14. Sea (X, Y) un v.a. con densidad:

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2x^2} & \text{si } |x| < 1, \quad 0 < y < x^2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- a) Hallar f_X y f_Y .
- b) ¿Son X e Y independientes?. Justificar.
- c) Probar que $U = \frac{Y}{X^2}$ tiene distribución $U(0, 1)$.

15. a) Sean $X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$ e $Y \sim \Gamma(\beta, \lambda)$ v.a. independientes. Probar que si $U = X + Y$ y $V = \frac{X}{X+Y}$, entonces $U \sim \Gamma(\alpha + \beta, \lambda)$ y $V \sim \beta(\alpha, \beta)$.

b) Deducir que si $U_1 \sim \chi^2(p)$, $U_2 \sim \chi^2(q)$ son v.a. independientes, entonces

$$\frac{U_1}{U_1 + U_2} \sim \beta\left(\frac{p}{2}, \frac{q}{2}\right).$$

16. a*) Sean $X_1, \dots, X_n$ v.a. independientes e idénticamente distribuidas con función de distribución F . Se ordenan en forma creciente, obteniéndose las v.a. $U_1, \dots, U_n$. En particular:

$$U_1 = \min_{1 \leq i \leq n} X_i \quad U_n = \max_{1 \leq i \leq n} X_i.$$

Obtener la función de distribución de U_k ($1 \leq k \leq n$).

b) Sea

$$f(x) = e^{-(x-\theta)} I_{(\theta, \infty)}(x)$$

Obtener la distribución de U_1

c) Sea

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{x}{\theta} & \text{si } 0 < x \leq \theta \\ 1 & \text{si } x > \theta \end{cases}$$

Obtener la distribución de U_n .

17. Sea $X_1, \dots, X_n$ v.a. independientes con distribución exponencial de parámetros $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, respectivamente.

a) Mostrar que la distribución de $Y = \min_{1 \leq i \leq n} X_i$ es exponencial.

b) Probar que

$$P(X_k = \min_{1 \leq i \leq n} X_i) = \frac{\alpha_k}{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}$$

Hint: X_k y $\min_{i \neq k} X_i$ son independientes. Considerar el suceso $X_k \leq \min_{i \neq k} X_i$.

18. Dos dados equilibrados, uno blanco y otro rojo, se arrojan independientemente. Sean N_1 y M_1 los números de tiros hasta que aparece el primer as en el dado blanco y en el dado rojo, respectivamente.

Hallar la distribución de $R = \max(N_1, M_1)$.

19. En un concurso de salto, cada atleta salta 3 veces, siendo su puntaje la máxima altura alcanzada. Si la altura en cada salto (en metros) es una v.a. con distribución $U(2, 2.5)$ y las tres alturas se suponen independientes, hallar la distribución del puntaje.

20. Sean $Z \sim N(0, 1)$, $X_1 \sim \chi^2(n)$, $X_2 \sim \chi^2(m)$, v.a. independientes.

a) Probar que

$$U = \frac{Z}{\sqrt{X_1/n}}$$

tiene distribución t de Student con n grados de libertad, es decir su función de densidad es la siguiente:

$$f_U(u) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})\sqrt{\pi n}} \left(1 + \frac{u^2}{n}\right)^{-(n+1)/2}$$

b) Probar que

$$V = \frac{X_1/n}{X_2/m}$$

tiene distribución F de Snedecor con n y m grados de libertad, es decir su función de densidad es la siguiente:

$$f_V(v) = \frac{\Gamma(\frac{n+m}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(\frac{m}{2})} v^{\frac{n}{2}-1} \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{n}{2}} \left(1 + \frac{n}{m}v\right)^{-(n+m)/2} I_{(0,\infty)}(v)$$