PROBABILIDADES

Trabajo Práctico 7

1. Sea X una v.a. simétrica respecto de μ, tal que $E(|X|) < \infty$. Demostrar que $E(X) = \mu$.

Sugerencia: Hacerlo en primer lugar para el caso $\mu = 0$, demostrando que, en este caso, las v.a. X y $-X$ tienen igual distribución. Luego, extenderlo al caso general.

2. Hallar la esperanza y la varianza de las siguientes distribuciones:

$Bi(n, p)$	$G(p)^*$	$BN(r, p)$
$P(\lambda)$	$E(\lambda)$	$\Gamma(\alpha, \lambda)$
$\chi^2(n)$	$N(\mu, \sigma^2)$	$U(a, b)$
$\beta(p, q)$		

3. De una urna que contiene D bolillas blancas y $N - D$ bolillas negras se extraen n bolillas sin reposición. Sea X = número de bolillas blancas extraídas y, para $i = 1, ..., n$,

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si la i–ésima bolilla extraída es blanca} \\ 0 & \text{si la i–ésima bolilla extraída es negra} \end{cases}$$

a) Probar que

$$P(X_i = 1, X_j = 1) = \frac{D(D-1)}{N(N-1)} \qquad \text{para } i \neq j$$

$$P(X_i = 1) = \frac{D}{N}$$

b) Hallar $E(X_i)$ y $var(X_i)$.

c) Calcular $cov(X_i, X_j)$, para $i \neq j$. Interpretar el resultado.

d) Probar que

$$var(X) = \frac{(N-n)nD(N-D)}{(N-1)N^2}$$

Sugerencia: Usar que $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

4. En un comercio de artículos del hogar hay en existencia 6 televisores. Sea X el número de clientes que entran a comprar un televisor. Si $X \sim P(5)$, ¿cuál es el número esperado de televisores vendidos?

5. Un juego consiste en arrojar un dado equilibrado hasta obtener un número mayor o igual que 4 por primera vez. Si se define X := número de veces que se arroja el dado, el puntaje que se obtiene es $(4-X)$ si $1 \leq X \leq 3$ y 0 en caso contrario.

a) ¿Cuál es el puntaje esperado de este juego?

b) Si se juega dos veces este juego y en total se obtuvieron 2 puntos, ¿cuál es la probabilidad de que la primera vez se haya obtenido puntaje 0?

6*. Probar que, si X es una v.a. no negativa, entonces

$$E(X^n) = \int_0^\infty n\, x^{n-1}\,(1-F(x))\,dx$$

7. Sean $X_1, ..., X_n$ v.a. independientes tales que para $k = 1, ..., n$

$$P(X_k \leq t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ t^k & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ 1 & \text{si } t > 1 \end{cases}$$

a) Sea $Y := \max(X_1, ..., X_n)$. Hallar F_Y, f_Y y $E(Y)$.

b) Hallar $E(X_1 X_2 ... X_n)$.

8. Se distribuyen al azar n bolillas en m urnas. Sean X el número de urnas vacías, Y el número de urnas que contienen exactamente una bolilla y Z el número de urnas que contienen dos o más bolillas.

a) Hallar $E(X)$.

Sugerencia: Definir

$$X_i := \begin{cases} 1 & \text{si la urna i está vacía} \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Verificar que $X = \sum_{i=1}^m X_i$.

b) Hallar $E(Y)$ y $E(Z)$.

c) En una central telefónica se tienen disponibles m líneas. Cada persona de un conjunto de n usuarios elige una línea al azar. Hallar la esperanza del número de líneas que no son usadas.

9. a) Probar que $cov(a + bX, c + dY) = b\,d\,cov(X, Y)$

b) Probar que $cov(X + Y, Z) = cov(X, Z) + cov(Y, Z)$

c) Probar que $cov(\sum_{i=1}^n X_i, \sum_{j=1}^m Y_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m cov(X_i, Y_j)$

10. a) En el ejercicio 4 de la práctica 6, calcular $E(X)$, $E(Y)$, $E(X+Y)$, $cov(X,Y)$ y $\rho(X,Y)$.

b) En el ejercicio 6 de la práctica 6, calcular $E(X)$, $E(Y)$, $E(X+Y)$, $cov(X,Y)$ y $\rho(X,Y)$.

11*. Sea $(X_1, ..., X_k) \sim M(n, p_1, ..., p_k)$, $n > 2$.

a) hallar $E(X_i)$, $var(X_i)$ y $cov(X_i, X_j)$.

b) hallar el mejor predictor lineal de X_1, basado en $X_2 + X_3$ y su error cuadrático medio (ECM).

12. Sea (X, Y) un vector aleatorio con distribución $N(0, \Sigma)$, Σ simétrica y definida positiva. Probar que

$$cov(X,Y) = 0 \Leftrightarrow X e Y \text{ son independientes}$$

13. Si $Z \sim N(0,1)$ e $Y = a + bZ + cZ^2$, probar que

$$\rho(Y,Z) = \frac{b}{\sqrt{b^2 + 2c^2}}$$

14. Sean X e Y v.a. con densidad conjunta

$$f_{XY}(x,y) = \frac{e^{-x/y}\, e^{-y}}{y} I_{(0,\infty)}(x)\, I_{(0,\infty)}(y)$$

Calcular $E(X/Y = y)$ y $E(X^2/Y = y)$.

15*. a) Sean X e Y v.a. discretas o continuas tales que la distribución condicional de Y dada $X = x$ es $F(y)$, es decir no depende de x. Probar que entonces X e Y son independientes y $F_Y(y) = F(y)$.

b) Usando a), hallar la distribución de $Y = XU$ cuando $X \sim \chi^2(n)$ y la distribución condicional de U dada $X = x$ es $\Gamma(n, \lambda x)$.

16. a) Sea $X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$, con $\alpha > 1$ y $\lambda > 0$, probar que

$$E(\frac{1}{X}) = \frac{\lambda}{\alpha - 1}$$

b) Sea U una v.a. con distribución t de Student con n grados de libertad ($n > 2$), probar que

$$Var(U) = \frac{n}{n-2}$$

Sugerencia: Recordar que U se define como cociente entre una v.a. $N(0,1)$ y una función de una v.a. χ^2 y usar esperanza condicional.

17. Sean X e Y v.a. tales que $X \sim U(-2\sqrt{15}, 2\sqrt{15})$ e $Y \sim \Gamma(7,3)$.

a) Probar que

$$E\left(\frac{X}{Y^3}\right) \leq \frac{9}{2}$$

b) ¿Qué pasa si X e Y son independientes?

18. Sea (X,Y) un v.a. continuo con densidad conjunta

$$f_{XY}(x,y) = 6\,(x-y)\,I_A(x,y)$$

siendo $A = \{(x,y)/0 < y \leq x < 1\}$

a) Hallar el mejor predictor de Y basado en X y su ECM.

b) Hallar el mejor predictor lineal de Y basado en X y su ECM.

c) Hallar el mejor predictor constante de Y y su ECM.

19. Sea $Z = Y - g(X)$, donde $g(X)$ es el mejor predictor lineal de Y basado en X , probar que $cov(X,Z) = 0$.

20. Sea P una v.a. con distribución $U(0,1)$ y sea X una v.a. tal que la distribución de X condicional a $P = p$ es Binomial de parámetros n y p , o sea $X/P = p \sim Bi(n,p)$.

a) Hallar la función de probabilidad puntual de la v.a. X , $p_X(x)$.

b) Hallar la función de distribución condicional de P dada $X = x$, $F_{P/X=x}(p)$.