PROBABILIDADES

Trabajo Práctico 8

1. Sean $(X_n)_{n\geq 1}$ v.a. independientes e idénticamente distribuidas, $X_i \sim \varepsilon(1)$, y sea

$$Y_n = \frac{X_n}{ln(n)}$$

a) Probar que $Y_n \xrightarrow{p} 0$.

b) Sea $A_n = \{Y_n \geq \epsilon\}$, $0 < \epsilon \leq 1$. Probar que $P(A^\infty) = 1$. Deducir que Y_n no converge a 0 en casi todo punto.

c) Sean $(X_n)_{n\geq 1}$ v.a. independientes tales que $P(X_n = 1) = \frac{1}{n}$, $P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}$. Entonces $X_n \xrightarrow{p} 0$ pero $P(X_n \to 0) = 0$.

2*. Sean $X_1, ..., X_n, ...$ v.a. independientes tales que $X_1 = 0$ y, para $j \geq 2$

$$P(X_j = k) = \begin{cases} \frac{1}{j^3} & \text{si } k = \pm 1, \pm 2, ..., \pm j \\ 1 - \frac{2}{j^2} & \text{si } k = 0 \end{cases}$$

Probar que

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{X_j}{n^\alpha} \xrightarrow{p} 0 \qquad \text{si } \alpha > \frac{1}{2}$$

Sugerencia: $\sum_{i=1}^{j} k^2 = \frac{j(j+1)(2j+1)}{6}$

3. Un minorista recibe mensualmente galletitas sin sal de 3 fábricas distintas siendo las cantidades recibidas (en kg.) v.a. independientes X, Y y Z con distribuciones: $X \sim N(100, 20)$, $Y = 97 + W$ con $W \sim \varepsilon(\frac{1}{3})$ y $Z \sim U(80, 90)$. Acotar la probabilidad de que el total recibido en un mes se encuentre entre 275 y 295 kg.

4. Una máquina produce rieles cuya longitud (en metros) es una v.a. con distribución $U(0.8, 1.2)$. Se eligen al azar n rieles en forma independientes. Sea $\overline{X}$ el promedio de sus longitudes. Hallar n tal que:

$$P(0.99 < \overline{X} < 1.01) > 0.90.$$

5. Sea p la probabilidad de que una persona elegida al azar apoye una nueva propuesta legislativa (p desconocida). Si se estima p a partir de la frecuencia relativa f_r que resulta al encuestar a n personas:

$$f_r = \frac{\text{número de personas que apoyan la propuesta}}{n},$$

cuánto más cerca esté f_r de p, mejor será la estimación.

Calcular el mínimo tamaño de muestra requerido para que $P(|f_r - p| \leq 0.1) \geq 0.95$.

6 *. Sean $(X_n)_{n\geq 1}$ e $(Y_n)_{n\geq 1}$ sucesiones de v.a. Probar que:

a) Si $X_n \xrightarrow{p} X$, $Y_n \xrightarrow{p} Y$, entonces $X_n + Y_n \xrightarrow{p} X + Y$, $X_n Y_n \xrightarrow{p} XY$. Más generalmente: $g(X_n, Y_n) \xrightarrow{p} g(X, Y)$ para toda g uniformemente continua en ambas variables. Si $X = a$ e $Y = b$ (a y b constantes) basta con que g sea continua en (a, b).

b) Si $X_n \xrightarrow{p} 0$ e Y está acotada en probabilidad, entonces $X_n Y_n \xrightarrow{p} 0$. Igual resultado vale para convergencia en casi todo punto.

c) Si $|X_n| \leq c$ para todo n, entonces es condición necesaria y suficiente para que $X_n \xrightarrow{p} 0$ que $\lim_{n\to\infty} E(|X_n|) = 0$.

d) Usando c) probar que si $X_n \xrightarrow{p} c$, c constante y f es una función acotada y además continua en c entonces $E(f(X_n))$ tiende a $f(c)$ cuando n tiende a infinito.

e) Si $X_n \xrightarrow{p} X$ entonces $X_n \xrightarrow{D} X$. Mostrar que la recíproca es falsa.

f) Si $X_n \xrightarrow{D} c$, (c constante) entonces $X_n \xrightarrow{p} c$.

7. Sean $(X_n)_{n\geq 1}$ v.a. independientes e idénticamente distribuidas, $X_i \sim U(0,1)$. Hallar el límite en casi todo punto de

$$Y_n = \left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right)^{\frac{1}{n}}$$

8. Sean $(X_n)_{n\geq 1}$ variables aleatorias i.i.d. con $E(X_i) = var(X_i) = 1$. Entonces:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{(n \sum_{i=1}^{n} X_i^2)^{\frac{1}{2}}} \xrightarrow{pp} \frac{1}{\sqrt{2}}$$

9. *Ejemplo de v.a. que convergen en casi todo punto sin convergencia de ningún momento.* Sean $(X_n)_{n\geq 1}$ v.a. tales que:

$$P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n^2} \qquad\qquad P(X_n = n^2) = \frac{1}{n^2}$$

Mostrar que $X_n \xrightarrow{pp} 0$ pero $E(X_n^p)$ no converge a 0 para ningún p natural.

10. a) Hallar la función característica de X, cuando X tiene distribución:

i. $P(\lambda)$ ii. $Bi(n, p)$ iii. $\varepsilon(\lambda)$

b) Usando funciones características probar que:

i) si X e Y son v.a. independientes, $X \sim P(\lambda)$, $Y \sim P(\mu)$, entonces $X+Y \sim P(\lambda+\mu)$.

ii) si X e Y son v.a. independientes, $X \sim Bi(n,p)$, $Y \sim Bi(m,p)$, entonces $X+Y \sim Bi(n+m,p)$.

c) Hallar la función característica de $X \sim \Gamma(n,\lambda)$ y de $Y \sim \chi^2(n)$.

d) Calcular para las variables de los items a) y c) los primeros cuatro momentos.

11. a) Probar que una v.a. X tiene distribución simétrica respecto de 0 si y sólo si $\varphi_X(t)$ es real $\forall t$.

b) Mostrar que si $X_1,...X_n$ son independientes y simétricas respecto de 0, entonces $\sum_{i=1}^n a_i X_i$ es simétrica respecto de 0, siendo $a_1,...a_n$ constantes reales.

c) Calcular la función característica de una v.a. Y con distribución doble exponencial de parámetro λ, es decir con función de densidad

$$f_Y(y) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|y|}$$

d) Demostrar que si V y W son v.a. i.i.d. con distribución exponencial de parámetro λ, entonces $Y = V - W$ tiene distribución doble exponencial.

12. Sean $(X_n)_{n\geq 1}$ y X v.a. discretas a valores en $\mathbb{N}\cup\{0\}$. Si $X_n \xrightarrow{D} X$ entonces $p_n(k) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} p(k)$, para todo $k = 0,1,2,\ldots$.

13. a) Usando que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{cos(xt)}{1+x^2} dx = \pi e^{-|t|}$$

hallar la función característica de una v.a. con distribución de Cauchy.

b) Verificar que, si X tiene distribución de Cauchy, $\varphi_{2X} = \varphi_X^2$, con lo cual φ_{X+Y} puede coincidir con $\varphi_X \varphi_Y$ aun cuando X e Y no sean independientes.

c) Sean $X_1,...X_n$ v.a. independientes con distribución de Cauchy. Hallar la distribución de

$$\frac{S_n}{n} = \frac{X_1 + ... + X_n}{n}$$

14. Sean $X_1,...X_n$ v.a. i.i.d., $X_n \sim U(0,1)$. Sean $X_{(1)} = \min(X_1,...,X_n)$, $X_{(n)} = \max(X_1,...,X_n)$, $U_n = nX_{(1)}$, $V_n = n(1-X_{(n)})$. Probar que:

a) $X_{(1)} \xrightarrow{p} 0, X_{(n)} \xrightarrow{p} 1$.

a) $U_n \xrightarrow{D} W, V_n \xrightarrow{D} W$, donde W tiene distribución exponencial de parámetro 1.

15. Sean $X_1, ...X_n$ v.a. i.i.d. con densidad

$$f(x) = \frac{2}{x^3}\, I_{[1,\infty)}(x)$$

Calcular aproximadamente

$$P\Big(\prod_{i=1}^{100} X_i > e^{55}\Big)$$

16. En cierto juego de azar la probabilidad de ganar es 0.3. Para participar en el mismo se paga 1 $ y, en caso de ganar, se reciben 5 $.

a) ¿Cuál es la probabilidad aproximada de que en 100 juegos un jugador gane más de 80 $? (Suponer que los juegos son independientes entre si).

b) ¿Cuántas veces tendrá que jugar para ganar más de 80 $ con probabilidad mayor o igual que 0.90?

17. Una empresa láctea produce un cierto tipo de queso en unidades cuyo peso (en kg.) es una v.a. con media 2 y varianza 0.04.

a) Calcular en forma aproximada la probabilidad de que 60 quesos pesen más de 122 kg.

b) ¿Cuántas unidades serán necesarias para satisfacer un pedido de 5000 kg con probabilidad mayor o igual que 0.95?

18. Sean $U_1, ...U_n$, v.a. independientes con distribución $U(0,1)$ y sea h una función continua.

a) Si se define $I_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} h(U_i)}{n}$, verificar que

$$E(I_1) = I = \int_0^1 h(x)dx$$

b) Proponer un método basado en generación de números al azar, para calcular en forma aproximada el valor de la integral I.

c) Proponer un método para el cálculo aproximado de

$$I = \int_a^b h(x)dx$$

siendo a y b número reales tales que $a < b$.

19. Sean $(X_n)_{n\geq 1}$ v.a. i.i.d., $X_n \sim U(0,\theta)$, $\theta > 0$. Probar que

$$\sqrt{n}[ln(2\bar{X}_n) - ln(\theta)] \xrightarrow{D} N(0, \frac{1}{3})$$

donde $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$.

20. Sean $(X_n)_{n\geq 1}$ v.a. i.i.d., $E(X_i) = 0$, $E(X_i^2) = 2$. Hallar el límite en distribución de

a) $Y_n = (\sqrt{n}\sum_{i=1}^n X_i)/\sum_{i=1}^n X_i^2$.

b) $U_n = (\sum_{i=1}^n X_i)/\sqrt{\sum_{i=1}^n X_i^2}$.