Lema de Borel Cantelli

Definición: Dada una sucesión de sucesos $A_1, A_2, \ldots$ en el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$, se define el límite superior de los $\{A_i\}$ como

$$A^\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k.$$

Se dice que el suceso A^∞ es la ocurrencia de un número infinito de los A_k. Veamos porqué.

$$\text{Si } w \in A^\infty \Longrightarrow w \in \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \quad \forall n.$$

$$\text{En particular,} \quad w \in \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \Longrightarrow w \in A_{k_1} \quad \text{para algún } k_1.$$

$$\text{Pero } w \in \bigcup_{k=(k_1+1)}^{\infty} A_k \Longrightarrow w \in A_{k_2} \quad \text{para algún } k_2 > k_1.$$

$$\text{De la misma forma,} \quad w \in \bigcup_{k=(k_2+1)}^{\infty} A_k \Longrightarrow w \in A_{k_3} \quad \text{para algún } k_3 > k_2 > k_1.$$

De esta manera, se obtiene una sucesión creciente de enteros positivos

$$k_1 < k_2 < \ldots < k_n < \ldots$$

tales que $w \in A_{k_i} \quad \forall i$, entonces w pertenece a infinitos A_n.

Definición: Dada una sucesión de sucesos $A_1, A_2, \ldots$ en el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$, se define el límite inferior de los $\{A_i\}$ como

$$A_\infty = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k.$$

Se puede ver que

$$A_\infty = \{w/w \quad \text{pertenece a todos salvo un número finito de los} A_n\}.$$

En efecto,

$$\text{Si } w \in A_\infty \Longrightarrow w \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \Longrightarrow w \in \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \quad \text{para algún n,}$$

$$\text{entonces } w \in A_k \quad \forall k \geq n.$$

Lema de Borel Cantelli: Sean $A_1, A_2, \ldots$ sucesos en el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$,

a) Si $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$, entonces $P(A^\infty) = 0$.

b) Si $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$ y los A_n son independientes, entonces $P(A^\infty) = 1$.

Demostración:

a)

$$\text{Si } \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} P(A_k) = 0.$$

$$\text{Pero } A^\infty \subset \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \quad \forall n \Longrightarrow P(A^\infty) \leq P(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k) \leq \sum_{k=n}^{\infty} P(A_k) \quad \forall n$$

Entonces,

$$P(A^\infty) \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} P(A_k) = 0.$$

b)

Usaremos la siguiente propiedad: Si $E_1 \supset E_2 \supset E_3 \ldots$ es una familia decreciente de sucesos entonces,

$$P(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i) = \lim_{n\to\infty} P(E_n).$$

$$P(A^\infty) = \lim_{n\to\infty} P(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k) = 1 - \lim_{n\to\infty} P(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k^c).$$

Basta probar que

$$\lim_{n\to\infty} P(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k^c) = 0.$$

$$P(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k^c) = \lim_{m\to\infty} P(\bigcap_{k=n}^{m} A_k^c) = \lim_{m\to\infty} \prod_{k=n}^{m} P(A_k^c),$$

por la independencia de los A_n. Además,

$$\lim_{m\to\infty} \prod_{k=n}^{m} P(A_k^c) = \lim_{m\to\infty} \prod_{k=n}^{m} (1 - P(A_k)) \leq \lim_{m\to\infty} \prod_{k=n}^{m} e^{-P(A_k)}.$$

pues $\forall\, 0 \leq p \leq 1,\ 1 - p \leq e^{-p}$.

Pero

$$\lim_{m\to\infty} \prod_{k=n}^{m} e^{-P(A_k)} = \lim_{m\to\infty} e^{-\sum_{k=n}^{m} P(A_k)} = e^{-\sum_{k=n}^{\infty} P(A_k)},$$

entonces,

$$\lim_{n\to\infty} P(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k^c) \leq \lim_{n\to\infty} e^{-\sum_{k=n}^{\infty} P(A_k)} = 0,$$

porque $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$ y queda demostrado el lema.

Propiedad: 1) Si $\{A_n\}$ es una sucesión creciente, es decir si $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \ldots$, entonces:

$$A_\infty = A^\infty = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

2) Si $\{A_n\}$ es una sucesión decreciente, es decir si $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \ldots$, entonces:

$$A_\infty = A^\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Demostración: Ejercicio.

Observación: La parte b) del Lema de Borel Cantelli no es necesariamente cierta si los A_n no son independientes. Por ejemplo, si $A_n = A \quad \forall n$, y $0 < P(A) < 1$, entonces $\sum P(A_n) = \infty$, pero

$$A^\infty = A \Longrightarrow P(A^\infty) < 1.$$

Ejemplo: Se arrojan monedas repetidamente. Sea p_n la probabilidad del suceso A_n: "cara en el n–ésimo lanzamiento".

Si $\sum p_n = \infty$, la probabilidad de obtener cara infinitas veces ($P(A^\infty)$) es 1, pero si $\sum p_n < \infty$, esa probabilidad es 0.

Si, por ejemplo, la moneda es siempre la misma, $\sum p_n = \sum p = \infty$ y por lo tanto $P(A^\infty) = 1$. Si, en cambio,

$$p_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \Longrightarrow \sum p_n < \infty \Longrightarrow P(A^\infty) = 0.$$

Bibliografía: B. James. (1981) Probabilidade: um curso em nivel intermediario. Pag. 197–200.