Esperanza de una función de una variable aleatoria

Proposición: Sea X una v.a. y sea $Y = h(X)$.

a) Si X es una v.a. discreta con función de probabilidad puntual $p_X(x)$

$$E(Y) = E(h(X)) = \sum_{j=1}^{\infty} h(x_j)\, p_X(x_j)$$

si esta esperanza existe.

b) Si X es una v.a. continua con función de densidad $f_X(x)$

$$E(Y) = E(h(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)\, f_X(x)\, dx$$

si esta esperanza existe.

Demostración: a) La hicimos en clase.

Demostración: b) Necesitaremos demostrar un Lema auxiliar.

Lema: Sea Y una v.a. continua con función de densidad $f_Y(y)$, entonces

$$E(Y) = \int_0^{\infty} P(Y > y)\, dy - \int_0^{\infty} P(Y \leq -y)\, dy.$$

Demostración del Lema:

$$\int_0^{\infty} P(Y > y)\, dy = \int_0^{\infty} \left[\int_y^{\infty} f_Y(t)\, dt\right] dy = \int_0^{\infty} \left[\int_0^{t} dy\right] f_Y(t)\, dt = \int_0^{\infty} t\, f_Y(t)\, dt.$$

Del mismo modo,

$$\int_0^{\infty} P(Y \leq -y)\, dy = \int_0^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{-y} f_Y(t)\, dt\right] dy = \int_{-\infty}^{0} \left[\int_0^{-t} dy\right] f_Y(t)\, dt = -\int_{-\infty}^{0} t\, f_Y(t)\, dt.$$

Por lo tanto,

$$\int_0^{\infty} P(Y > y)\, dy - \int_0^{\infty} P(Y \leq -y)\, dy = \int_0^{\infty} t\, f_Y(t)\, dt + \int_{-\infty}^{0} t\, f_Y(t)\, dt = E(Y)$$

y queda demostrado el lema.

Volviendo a la demostración de la parte b) de la **Proposición**,

$$\begin{aligned}
E(h(X)) &= \int_0^\infty P(h(X) > y)\, dy - \int_0^\infty P(h(X) \leq -y)\, dy \\
&= \int_0^\infty \left[\int_{\{x|h(x)>y\}} f_X(x)\, dx \right] dy - \int_0^\infty \left[\int_{\{x|h(x)\leq -y\}} f_X(x)\, dx \right] dy \\
&= \int_{\{x|h(x)>0\}} \left[\int_0^{h(x)} dy \right] f_X(x)\, dx - \int_{\{x|h(x)\leq 0\}} \left[\int_0^{-h(x)} dy \right] f_X(x)\, dx \\
&= \int_{\{x|h(x)>0\}} h(x)\, f_X(x)\, dx + \int_{\{x|h(x)\leq 0\}} h(x)\, f_X(x)\, dx = \int_{-\infty}^\infty h(x)\, f_X(x)\, dx.
\end{aligned}$$

como queríamos demostrar.