Dos Teoremas de Convergencia

Sea $X_1, X_2, \ldots$ y X v.a. en $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ y supongamos que

$$X_n(w) \to X(w) \qquad \forall w \in \Omega$$

¿En qué condiciones la esperanza del límite es el límite de las esperanzas?. Es decir, ¿cuándo se verifica

$$E(X) = \lim_{n\to\infty} E(X_n)?$$

No siempre es cierto. Como ejemplo, consideremos $X \sim Cauchy$ y sean

$$X_n = \begin{cases} X & \text{si} \quad |X| \leq n \\ \\ 0 & \text{si} \quad |X| > n \end{cases}$$

Se verifica que $X_n \to X$ cuando $n \to \infty$. Además $E(X_n) = 0 \ \ \forall \ \ n$ pues X_n es acotada y simétrica. Obviamente, $E(X_n)$ no converge a $E(X)$.

Teorema de Convergencia Monótona: Sean $X_1, X_2, \ldots$ y X v.a. en $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$. Si $X_n \geq 0$ y $X_n \uparrow X$ (o sea, $X_n(w) \geq 0$ y $X_n(w) \uparrow X(w) \quad \forall w \in \Omega$), entonces

$$E(X_n) \uparrow E(X).$$

Teorema de Convergencia Dominada: Sean Y, X y $X_1, X_2, \ldots$ v.a. en $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ tales que $E(Y) < \infty$, $|X_n| \leq Y \quad \forall n \quad$ y $X_n(w) \to X(w) \quad \forall w$, entonces $E(X) < \infty$, $E(X_n) < \infty$ y

$$E(X_n) \to E(X).$$

Demostración de ambos teoremas: B. James.

Leyes de los Grandes Números

Convergencia en probabilidad: $\{X_n\}$ converge en probabilidad a X ($X_n \xrightarrow{p} X$) sii $\forall \epsilon > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} P(\{w/|X_n(w) - X(w)| \geq \epsilon) = 0$$

Convergencia en casi todo punto: $\{X_n\}$ converge a X en casi todo punto ($X_n \xrightarrow{pp} X$ o $X_n \xrightarrow{ctp} X$) sii

$$P(\{w/X_n(w) \to X(w)\}) = 1$$

Proposición: $X_n \xrightarrow{pp} X \quad \Rightarrow \quad X_n \xrightarrow{p} X$

Demostración: Debemos probar que $\forall \epsilon > 0$, $P(|X_n - X| \geq \epsilon) \to 0$.
Sea $A_o = \{w / X_n(w) \to X(w)\}$. Dado que $X_n \xrightarrow{pp} X$, $P(A_o) = 1$. Sean

$$A_n = \cap_{k=n}^{\infty} [|X_k - X| < \epsilon]$$

Si $w \in A_o$, $w \in A_n$ para algún n, entonces

$$A_o \subset \cup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Pero $A_n \subset A_{n+1} \subset \ldots$, entonces

$$P(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n \to \infty} P(A_n)$$

Luego,

$$1 = P(A_o) \leq P(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n \to \infty} P(A_n)$$

entonces, $\lim_{n \to \infty} P(A_n) = 1$.

Pero, $A_n \subset \{|X_n - X| < \epsilon\}$, entonces

$$P(|X_n - X| < \epsilon) \to 1 \qquad \Rightarrow \qquad P(|X_n - X| \geq \epsilon) \to 0$$

como queríamos demostrar.

Ejemplo: Veremos un ejemplo que muestra que no es cierto que $X_n \xrightarrow{p} X \quad \Rightarrow \quad X_n \xrightarrow{pp} X$
Sea $X \sim U(0,1)$ y definamos los siguientes intervalos:

$$I_1 = [0,1]$$

$$I_2 = \left[0, \tfrac{1}{2}\right] \quad I_3 = \left[\tfrac{1}{2}, 1\right]$$

$$I_4 = \left[0, \tfrac{1}{4}\right] \quad I_5 = \left[\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}\right] \quad I_6 = \left[\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{4}\right] \quad I_7 = \left[\tfrac{3}{4}, 1\right]$$

de manera que, para $m = 0, 1, 2, \ldots$, $i = 0, 1, \ldots, 2^m - 1$

$$I_{2^m+i} = \left[\frac{i}{2^m}, \frac{i+1}{2^m}\right]$$

Sea

$$X_n = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad X \in I_n \\ \\ 0 & \text{si} \quad X \notin I_n \end{cases}$$

$X_n \xrightarrow{p} 0$, pues $\forall \epsilon > 0$,

$$P(|X_n - 0| \geq \epsilon) = P(X_n = 1) = P(X \in I_n) \to_{n\to\infty} 0.$$

Sin embargo, X_n no converge en casi todo punto a 0. De hecho, no converge en ningún punto pues $\forall w \in \Omega$, $X_n(w) = 1$ para infinitos n y $X_n(w) = 0$ para infinitos n.

Propiedades: Sean $\{X_n\}_{n\geq 1}$ e $\{Y_n\}_{n\geq 1}$ sucesiones de v.a.

a) Si $X_n \xrightarrow{p} X$, $Y_n \xrightarrow{p} Y$, entonces

$c\, X_n \xrightarrow{p} c\, X$

$g(X_n) \xrightarrow{p} g(X) \qquad \forall g \qquad \text{continua}$

$X_n + Y_n \xrightarrow{p} X + Y$

$X_n\, Y_n \xrightarrow{p} X\, Y$

$g(X_n, Y_n) \xrightarrow{p} g(X, Y) \qquad \forall g \qquad \text{unif. continua}$

Si $(X, Y) = (a, b)$ basta con que g sea continua.

b) Si $X_n \xrightarrow{pp} X$, $Y_n \xrightarrow{pp} Y$, entonces

$g(X_n, Y_n) \xrightarrow{pp} g(X, Y) \qquad \forall g \quad \text{continua}$

d) Si $|X_n| \leq c \quad \forall n$ (c constante), entonces
$X_n \xrightarrow{p} 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} E(|X_n|) = 0$

e) Si $X_n \xrightarrow{p} c$ (c constante) y f es acotada y continua en c, entonces

$E(f(X_n)) \rightarrow_{n\to\infty} f(c)$

Desigualdad de Markov: Sea $h : R \rightarrow R^+$ tal que h es par y h restringida a R^+ es creciente, y sea X una v.a. tal que $E(h(X)) < \infty$, entonces $\forall\, t \in R$,

$$P(|X| \geq t) \leq \frac{E(h(X))}{h(t)}$$

Caso particular: Sea X una v.a. no negativa, entonces $\forall \quad a > 0$,

$$P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$$

Desigualdad de Chebyshev: Sea X una v.a. con varianza finita. Para todo $k > 0$,

$$P(|X - E(X)| \geq k) \leq \frac{V(X)}{k^2}$$

Ley débil de los Grandes Números

Ley débil de Chebyshev: Sean $X_1, X_2, \ldots$ v.a. independientes con varianzas finitas y uniformemente acotadas (o sea, existe c finito, tal que $V(X_i) \leq c \quad \forall i$),

entonces
$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i - \sum_{i=1}^n E(X_i)}{n} \xrightarrow{p} 0$$

Nota: La hipótesis de varianzas finitas fue eliminada por Khintchin.

Ley débil de Khintchin: Sean $X_1, X_2, \ldots$ v.a. independientes e idénticamente distribuídas con esperanza finita μ, entonces
$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \xrightarrow{p} \mu$$
o sea,
$$P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} - \mu\right| \geq \epsilon\right) \to 0 \qquad \forall\, \epsilon > 0$$

Ley débil de Bernoulli: Consideremos una serie de ensayos Bernoulli independientes, con probabilidad p de éxito en cada ensayo y sea S_n el número de éxitos en los primeros n ensayos. Entonces
$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{p} p$$

Ley fuerte de los Grandes Números

Primera Ley fuerte de Kolmogorov: Sean $X_1, X_2, \ldots$ v.a. independientes tales que

$$E(X_i) = \mu_i < \infty \qquad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{V(X_i)}{i^2} < \infty$$

Entonces,

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - E(X_i))}{n} \xrightarrow{pp} 0$$

Nota: En particular, si las X_i son v.a. i.i.d. con $E(X_i) = \mu < \infty$, $V(X_i) = \sigma^2 < \infty$, entonces

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \xrightarrow{pp} \mu$$

Ley fuerte de Kolmogorov: Sean $X_1, X_2, \ldots$ v.a. i.i.d. tales que $E(X_i) = \mu$, entonces,

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \xrightarrow{pp} \mu$$

Corolario (Ley fuerte de Borel): Sean $X_1, X_2, \ldots$ v.a. i.i.d tales que $P(X_n = 1) = p$, $P(X_n = 0) = 1 - p$, entonces,

$$\frac{S_n}{n} = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} \xrightarrow{pp} p.$$