

PROBABILIDADES

Trabajo Práctico 2

1. Dar un espacio muestral adecuado para cada uno de los siguientes experimentos:
 - a) Se arroja un dado equilibrado dos veces.
 - b) Se arroja un dado equilibrado hasta que aparece el primer as.
 - c) De una caja que contiene 5 bolillas numeradas del 1 al 5, se extraen dos bolillas
 - i) con reposición
 - i) sin reposición.
 - d) Se elige al azar un punto en el círculo unitario.
2. Se arroja dos veces un dado equilibrado. Sean los sucesos:
 A : la suma de los puntos es par
 B : la suma de los puntos es exactamente 8
 C : ambos resultados son distintos
Explicitar el espacio muestral y calcular las probabilidades de A , B , C , $A \cup B$, $A \cap B$, $A \cap C$, $A \setminus C$.
3. En un placard hay n pares de zapatos. Si se eligen al azar $2r$ zapatos (con $2r < n$), calcular la probabilidad de que
 - a) no haya ningún par completo.
 - b) haya exactamente un par completo.
 - c) haya exactamente dos pares completos, suponiendo $n \geq 5$.
4. Al colocar 6 productos distintos en sus envases, un operario se ha equivocado en 3 de ellos. Si un supervisor revisa uno a uno los envases ¿Cuál es la probabilidad de que
 - a) los 3 primeros envases revisados contengan los productos equivocados?
 - b) necesite revisar i envases ($i=4,5,6$) para encontrar los 3 que contienen los productos equivocados?
5. Una compañía constructora trabaja en dos proyectos diferentes. Sea A el evento: "el primero de los proyectos se termina en la fecha del contrato" y definamos análogamente B para el segundo proyecto. Si $P(A \cup B) = 0.9$ y $P(A \cap B) = 0.5$, ¿cuál es la probabilidad de que exactamente un proyecto se termine para la fecha de contrato?
6. a) Enunciar y demostrar una fórmula para

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4)$$

- b) Cuatro matrimonios deciden bailar un tango, eligiendo los hombres su compañera de baile al azar, ¿Cuál es la probabilidad de que el hombre i elija a su esposa como compañera de baile? ($i=1,2,3,4$)
- c) En el problema b), ¿Cuál es la probabilidad de que al menos un hombre elija a su esposa como compañera de baile?

7. De un bolillero que contiene 5 bolillas numeradas 1, 2, 3, 4, 5 se extrae una al azar, sea la número k . Se eliminan las bolillas cuyo número es mayor que k de la urna y se hace una segunda extracción al azar entre las bolillas 1 a k , sea la número j . Se eliminan las bolillas cuyo número es mayor que j de la urna y se hace una tercera extracción al azar entre las bolillas 1 a j .

- a) Describir un espacio muestral adecuado para este experimento y determinar el número de elementos que posee.
- b) ¿Es razonable suponer equiprobabilidad en este espacio? ¿Qué probabilidad le asignaría al (3,2,1)?

8. Un bolillero contiene N bolillas numeradas $1,2,\dots,N$. Se sacan una a una n bolillas ($1 \leq n \leq N$), sin reposición. Sean m y k enteros tales que $1 \leq m \leq N$ y $1 \leq k \leq n$. Hallar la probabilidad de que

- a) se extraiga la bolilla m en la k -ésima extracción
- b) se extraiga la bolilla m
- c) el máximo número obtenido sea $\leq m$
- d) el máximo número obtenido sea m
- e) $a \leq M \leq b$, siendo M el máximo número obtenido y a y b dos números naturales dados, $a < b$
- f) los números de las bolillas extraídas, en el orden en que fueron extraídas, constituyan una sucesión estrictamente monótona.

9. Resolver el ejercicio 8 en el caso en que cada bolilla obtenida sea devuelta a la urna.

10. De un bolillero que contiene B bolillas blancas y N negras se extraen sucesivamente y sin reposición n bolillas, $1 \leq n \leq B + N$

- a) hallar la probabilidad de que la k -ésima bolilla extraída, $1 \leq k \leq n$, sea
 - i) blanca
 - ii) la primer blanca obtenida

- b) para $k = n$, sea p_n la probabilidad obtenida en a) ii). Probar que si B y N tienden a infinito de manera que $p = \frac{B}{B+N}$ permanezca constante, entonces

$$p_n \rightarrow p(1-p)^{n-1}$$

11. De un bolillero que contiene B bolillas blancas y N negras se extraen sucesivamente y sin reemplazo n bolillas, $1 \leq n \leq B+N$. Hallar la probabilidad p_k de obtener k bolillas blancas. Probar que si B y N tienden a infinito de manera que $p = \frac{B}{B+N}$ permanezca constante, entonces

$$p_k \rightarrow \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

12. Consideremos el caso en que se toma una muestra aleatoria con reposición de tamaño r de una población de n elementos: a_1, \dots, a_n (supongamos equiprobabilidad). Sea A el suceso: "en la muestra obtenida: a_{j_1}, \dots, a_{j_r} no hay elementos repetidos",

a) calcular $P(A)$

b) Los cumpleaños de r personas forman una muestra de tamaño r de la población de todos los días del año. Si bien los años no son todos iguales en longitud, y sabemos que los porcentajes de nacimientos no son constantes a través del año, como una primera aproximación podemos considerar que una elección al azar de personas es equivalente a una selección al azar de las fechas de nacimiento y que el año es de 365 días. Hallar la probabilidad de que entre r personas elegidas al azar todas ellas tengan distintas fechas de cumpleaños.

El resultado numérico es sorprendente. Por ejemplo, para $r = 23$, $p < \frac{1}{2}$, o sea que entre 23 personas la probabilidad de que al menos 2 cumplan años el mismo día es mayor que 0.50.

c) Hallar la probabilidad de que si n bolillas distintas se distribuyen al azar en n cajas, estén todas las cajas ocupadas.

13. a) Se lanza un dado n veces. Hallar la probabilidad de que la suma de los puntos sea exactamente igual a k .

(Hint: hallar el coeficiente de x^k en el desarrollo de $(x + x^2 + \dots + x^6)^n$)

b) Se tiran dos dados, ¿Cuál es probabilidad de que sumen 7?

c) Se tiran tres dados, ¿Cuál es probabilidad de que sumen 9?