Teorema de cambio de variable

Teorema: Sean (X,Y) y (U,V) vectores aleatorios. Continuos, tales que

$$\begin{aligned} U &= h_1(X,Y) \\ V &= h_2(X,Y) \end{aligned} \qquad \text{o sea} \qquad (U,V) = h(X,Y) = \left(h_1(X,Y), h_2(X,Y)\right)$$

donde la función $h : R^2 \to R^2$ satisface:

- h tiene derivadas parciales continuas en $B = \{(x,y) \in R^2 \,/\, f_{XY}(x,y) > 0\}$.
- h es biyectiva de B en $h(B)$
- $J_{h(x,y)} \neq 0$ en B, donde

$$J_{h(x,y)} = \det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial h_1(x,y)}{\partial x} & \dfrac{\partial h_1(x,y)}{\partial y} \\ \dfrac{\partial h_2(x,y)}{\partial x} & \dfrac{\partial h_2(x,y)}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Entonces, el vector aleatorio (U,V) tiene densidad

$$f_{UV}(u,v) = f_{XY}(h^{-1}(u,v)) \left| J_{h^{-1}} \right| I_{h(B)}(u,v)$$

Ejemplos:

1) Sean X e Y v.a. independientes con distribución exponencial de parámetro λ. Hemos demostrado que $U = X + Y$ tiene distribución Gamma de parámetros 2 y λ. Lo demostraremos ahora usando el Teorema de cambio de variable. Para ello completamos la función $U = X + Y$, de manera de obtener una función $h : R^2 \to R^2$ que satisfaga las condiciones requeridas. Sea, por ejemplo,

$$\begin{cases} h_1(x,y) = u = x + y \\ h_2(x,y) = v = y \end{cases} \qquad \text{entonces} \qquad \begin{cases} x = g_1(u,v) = u - v \\ y = g_2(u,v) = v \end{cases}$$

El jacobiano de la inversa de h, que llamamos g, es

$$J_{h^{-1}} = \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

Entonces

$$f_{UV}(u,v) = f_{XY}(u - v, v)\, I_{(0,\infty)}(u - v) I_{(0,\infty)}(v)$$

$$f_{UV}(u,v) = \lambda\, e^{-\lambda(u-v)}\, \lambda\, e^{-\lambda v}\, I_{(v,\infty)}(u)\, I_{(0,\infty)}(v)$$

Debemos obtener la densidad marginal de U y para ello integramos respecto de v. Si $u \leq 0$, $f_U(u) = 0$, sea entonces $u > 0$,

$$f_U(u) = \int_0^u \lambda\, e^{-\lambda(u-v)}\ \lambda\, e^{-\lambda v}\ dv = \lambda^2\ \mathrm{e}^{-\lambda \mathrm{u}} \int_0^u dv = \lambda^2\ \mathrm{e}^{-\lambda \mathrm{u}} u$$

Luego, $f_U(u) = \lambda^2\ \mathrm{e}^{-\lambda\,\mathrm{u}} u\ I_{(0,\infty)}(u)$ y queda demostrado que $X+Y \sim \mathrm{G}(2,\lambda)$.

2) Sean X e Y v.a. independientes con distribución Normal standard y sean $U = X+Y$ y $V = X-Y$. Hallemos la densidad conjunta del v.a. (U,V).

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} \mathrm{x} = \dfrac{\mathrm{u+v}}{2} \\ \mathrm{y} = \dfrac{\mathrm{u - v}}{2} \end{cases}$$

Entonces

$$J_{h^{-1}} = \det\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} = -1/2\,.$$

$$f_{UV}(u,v) = f_{XY}(h^{-1}(u,v))\left|J_{h^{-1}}\right| I_{h(B)}(u,v) = f_X\left(\frac{u+v}{2}\right) f_Y\left(\frac{u-v}{2}\right)\frac{1}{2}$$

$$f_{UV}(u,v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u+v}{2}\right)^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u-v}{2}\right)^2} \frac{1}{2} = \frac{1}{4\pi} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u^2+2uv+v^2+u^2-2uv+v^2}{4}\right)} = \frac{1}{4\pi} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u^2+v^2}{2}\right)}$$

$$f_{UV}(u,v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right)^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{v}{\sqrt{2}}\right)^2}$$

Por lo tanto U y V son v.a. independientes con distribución N(0,2).

3) (*Extensión a dimensión mayor que 2)*. Sean X_1, X_2 y X_3 v.a. independientes con distribución N(0,1), hallar la distribución conjunta de (U,V,W) siendo

$$\begin{cases} U = X_1 + X_2 + X_3 \\ V = X_1 - X_2 \\ W = X_1 - X_3 \end{cases}$$

Observar que

$$\begin{cases} u = x_1 + x_2 + x_3 \\ v = x_1 - x_2 \\ \mathrm{w} = \mathrm{x}_1 - x_3 \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} x_1 = \dfrac{u+v+w}{3} \\ x_2 = \dfrac{u-2v+w}{3} \\ x_3 = \dfrac{u+v-2w}{3} \end{cases}$$

y, entonces

$$J_{h^{-1}} = \det\begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & -2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & -2/3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}.$$

$$f_{UVW}(u,v,w) = f_{X_1X_2X_3}\left(\frac{u+v+w}{3}, \frac{u-2v+w}{3}, \frac{u+v-2w}{3}\right)\frac{1}{3}$$

$$f_{UVW}(u,v,w) = \frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u+v+w}{3}\right)^2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u-2v+w}{3}\right)^2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u+v-2w}{3}\right)^2}$$

Desarrollando se obtiene:

$$f_{UVW}(u,v,w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{3}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u}{\sqrt{3}}\right)^2}\frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{2v^2+2w^2-2vw}{3}\right)}.$$

Se observa, en particular, que $U = X_1+X_2+X_3 \sim N(0,3)$.

Algunos resultados importantes:

1) Si $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ y $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ son v.a. independientes, entonces

$$aX_1 + bX_2 \sim N(a\mu_1 + b\mu_2, a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2)$$

2) Si $X_1,\dots,X_n$ son v.a. independientes e idénticamente distribuidas, $X_i \sim N(0,1)$ y $\mathbf{a} \in R^n$ es un vector tal que $\|\mathbf{a}\| = 1$, entonces

$$\sum_{i=1}^{n} a_i X_i \sim N(0,1)$$

Dem: Sea B una matriz ortogonal de dimensión n × n, cuya primer columna es el vector $\mathbf{a}$ y sea $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)'$. Definiendo

$$\boldsymbol{Y} = B'\boldsymbol{X} \tag{1}$$

su primera componente es $Y_1 = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i$.

El jacobiano de la transformación (1) $J = det(B) = 1$ pues la matriz B es ortogonal. Entonces:

$$f_{\boldsymbol{Y}}(\boldsymbol{y}) = f_{\boldsymbol{X}}(B\boldsymbol{y}) = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^n} e^{-\frac{1}{2}\left\|B\boldsymbol{y}\right\|^2} = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^n} e^{-\frac{1}{2}\left\|\boldsymbol{y}\right\|^2}$$

y por lo tanto las componentes del vector ***Y*** son v.a. independientes con distribución $N(0,1)$. Hemos demostrado entonces que Y_1, que es la primera componente, tiene distribución Normal standard.

3) **Teorema**: Sean $X_1, \ldots, X_n$ v.a. independientes e idénticamente distribuidas, $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, entonces

i) $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{\sqrt{n}(\overline{X} - \mu)}{\sigma} \sim N(0,1)$

ii) $\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$ siendo $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2$

iii) $\overline{X}$ y s^2 son v.a. independientes

iv) $\frac{\sqrt{n}(\overline{X} - \mu)}{s} \sim t_{n-1}$

Dem: No la haremos pero también se basa en hallar una transformación ortogonal adecuada. Este Teorema lo verán nuevamente en Estadística Teórica.