

Dada una variable aleatoria X , introduciremos la función característica de X , que se denotará $\varphi_X(t)$. El objetivo de los Teoremas que se enuncian a continuación es probar que

$$X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X \iff \varphi_{X_n}(t) \rightarrow \varphi_X(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Función característica

Sean X e Y v.a. en $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$, $Z = X + iY$ es una variable aleatoria compleja, es decir, $Z : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$

$$Z(w) = X(w) + iY(w) \quad \forall w \in \Omega$$

La esperanza de Z se define:

$$E(Z) = E(X) + iE(Y)$$

si $E(X) < \infty$, $E(Y) < \infty$.

Consideremos la función $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$, la variable aleatoria compleja

$$e^{iX} = \cos(X) + i\sin(X)$$

tiene esperanza finita cualquiera sea X pues $\sin(x)$ y $\cos(x)$ están acotadas.

Definición: Sea X una v.a. con distribución F , la función característica de X es la función

$$\varphi_X : R \rightarrow C$$

definida como

$$\varphi_X(t) = E(e^{itX}) = E(\cos(tX)) + i E(\operatorname{sen}(tX))$$

Propiedades:

1) $|\varphi_X(t)| \leq 1 \quad \forall t \in R$

2) $\varphi_X(0) = 1$

3) $\overline{\varphi_X(t)} = \varphi_X(-t)$

4) φ_X es uniformemente continua en R

5) Si X e Y son v.a. independientes,

$$\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t) \varphi_Y(t) \quad \forall t \in R$$

6) Si X_1, \dots, X_n son v.a. independientes,

$$\varphi_{\sum_{i=1}^n X_i}(t) = \prod_{i=1}^n \varphi_{X_i}(t) \quad \forall t \in R$$

7) X tiene distribución simétrica alrededor de 0 si y sólo si $\varphi_X(t)$ es real $\forall t$

8) Si $Y = aX + b$,

$$\varphi_Y(t) = e^{itb} \varphi_X(at)$$

9) Si $E(|X|^n) < \infty$, entonces φ_X tiene n derivadas continuas ($\varphi_X \in \mathcal{C}^n$) y

$$\varphi_X^{(k)}(t) = i^k E(X^k e^{itX}) \quad \forall k = 1, \dots, n$$

En particular, $\varphi_X^{(k)}(0) = i^k E(X^k)$, o sea que la función característica actúa como función generadora de momentos.

Ejemplos: 1) $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$

$$\begin{aligned} \varphi_X(t) &= E(e^{itX}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{itn} e^{-\lambda} \lambda^n}{n!} = \\ &= e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^{it})^n}{n!} = e^{-\lambda} e^{\lambda e^{it}} = e^{\lambda(e^{it}-1)} \end{aligned}$$

Entonces, $i E(X) = \varphi'_X(0)$

pero, $\varphi'_X(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)} \lambda e^{it} i$

Entonces, $\varphi'_X(0) = \lambda i$ y por lo tanto,

$$i E(X) = \lambda i \Rightarrow E(X) = \lambda$$

Por otra parte, $i^2 E(X^2) = \varphi_X''(0)$

pero,

$$\begin{aligned}\varphi_X''(t) &= e^{\lambda(e^{it}-1)} \lambda e^{it} i \lambda i e^{it} + e^{\lambda(e^{it}-1)} \lambda i^2 e^{it} = \\ &= e^{\lambda(e^{it}-1)} e^{it} i^2 \lambda (\lambda e^{it} + 1)\end{aligned}$$

Entonces, $\varphi_X''(0) = i^2 \lambda (\lambda + 1)$

$$i^2 E(X^2) = i^2 \lambda (\lambda + 1) \Rightarrow E(X^2) = \lambda^2 + \lambda$$

y $V(X) = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$.

Del mismo modo, podemos obtener los restantes momentos de X .

2) $X \sim N((0, 1)$

$$\varphi_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} e^{-x^2/2} dx$$

Pero,

$$e^{itx-x^2/2} = e^{itx-x^2/2+t^2/2} e^{-t^2/2} = e^{(t+ix)^2/2} e^{-t^2/2}$$

Entonces,

$$\varphi_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(t+ix)^2/2} e^{-t^2/2} dx = e^{-t^2/2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{(t+ix)^2/2} dx$$

Probaremos que

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{(t+ix)^2/2} dx = 1$$

$$\begin{aligned} h'(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (t + i x) e^{(t+ix)^2/2} dx = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-k}^k \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (t + i x) e^{(t+ix)^2/2} dx = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (-i) e^{(t+ix)^2/2} \Big|_{-k}^k \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(-i)}{\sqrt{2\pi}} \left[e^{(t+ik)^2/2} - e^{(t-ik)^2/2} \right] \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(-i)}{\sqrt{2\pi}} e^{(t^2-k^2)/2} \left[e^{tik} - e^{-tik} \right] \end{aligned}$$

Pero,

$$|e^{tik} - e^{-tik}| \leq 2 \quad \text{y} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} e^{(t^2-k^2)/2} = 0$$

Entonces, $h'(t) = 0 \Rightarrow h(t)$ es constante. Pero

$$h(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx = 1$$

Entonces, $h(t) = 1 \quad \forall t$ y

$$\varphi_X(t) = e^{-t^2/2}$$

Si $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$, entonces, $Y = \sigma X + \mu$ con $X \sim N(0, 1)$, entonces

$$\varphi_Y(t) = \varphi_{\sigma X + \mu}(t) = e^{it\mu} \varphi_X(\sigma t) = e^{it\mu} e^{-\sigma^2 t^2/2}$$

Fórmula de Inversión: Sea X una v.a. con distribución F y función característica φ , y sean a y b dos puntos de continuidad de F , $a < b$, entonces

$$F(b) - F(a) = \frac{1}{2\pi} \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-k}^k \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \varphi(t) dt$$

Corolario:

$$F_X = F_Y \iff \varphi_X = \varphi_Y \quad (\varphi_X(t) = \varphi_Y(t) \quad \forall t \in \mathbb{R})$$

Ejemplo: Sea $\varphi(t) = \cos(at)$ ($a > 0$)

Veremos que φ es una función característica, hallando la v.a. X correspondiente.

Como $\varphi(t)$ es real, X es simétrica. Además,

$$\varphi(t) = \cos(at) = E(\cos(tX))$$

pues la parte imaginaria es nula. Como $\cos(at) = \cos(-at)$, X es la v.a. discreta tal que

$$P(X = a) = P(X = -a) = 1/2.$$

Teorema de Helly–Bray: Sean F y F_1, F_2, \dots funciones de distribución. Si F_n converge débilmente a F , entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int g(x) dF_n(x) = \int g(x) dF(x)$$

para toda función g continua y acotada ($g : R \rightarrow R$).

Observaciones: 1) La recíproca del Teorema es válida, o sea si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int g(x) dF_n(x) = \int g(x) dF(x)$$

para toda g continua y acotada, entonces F_n converge débilmente a F y, debido a esta equivalencia, muchas veces se toma como definición de convergencia débil.

2) Si $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$, por Helly–Bray, $E(g(X_n))$ converge a $E(g(X))$, para toda g continua y acotada. En particular, como $\text{sen}(x)$ y $\text{cos}(x)$ son continuas y acotadas, resulta que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{X_n}(t) = \varphi_X(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Teorema de continuidad de Paul–Levy: Sean F_1, F_2, \dots funciones de distribución y $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ sus correspondientes funciones características. Si φ_n converge puntualmente a una función φ y si φ es continua en 0, entonces

- a) existe una función de distribución F tal que $F_n \xrightarrow{w} F$
- b) φ es la función característica de F

Notas:

1) Estos dos teoremas implican que

$$X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X \iff \varphi_{X_n} \rightarrow \varphi_X$$

2) El Teorema de Paul–Levy es más fuerte que la "suficiencia" pues dice que el límite de una sucesión de funciones características es una función característica si es continua en 0.

Corolario:

a) Sean X_1, X_2, \dots v.a. Si $\varphi_{X_n}(t) \rightarrow \varphi_X(t) \forall t \in R$ y si φ es continua en 0, entonces φ es función característica de alguna v.a. X , o sea $\varphi = \varphi_X$ y $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$.

b) Si $\varphi_{X_n}(t) \rightarrow e^{-t^2/2} \quad \forall t$, entonces $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} Z$ con $Z \sim N(0, 1)$, es decir $F_n \xrightarrow{w} \phi$.

Teorema Central del Límite**Teorema Central del Límite para v.a. i.i.d:**

Sean X_1, X_2, \dots v.a. i.i.d. con $E(X_i) = \mu$, $V(X_i) = \sigma^2 < \infty$, y sea $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$, entonces

$$\frac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{V(S_n)}} = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{D}} Z$$

con $Z \sim N(0, 1)$.

Demostración: Supondremos $\mu = 0$. Por el Teorema de Paul–Levy, basta probar que

$$\varphi_{S_n/\sigma\sqrt{n}}(t) \rightarrow e^{-t^2/2} \quad \forall t \in R$$

$$\varphi_{S_n/\sigma\sqrt{n}}(t) = \varphi_{S_n} \left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}} \right) = \prod_{i=1}^n \varphi_{X_i} \left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}} \right) = \left[\varphi_{X_i} \left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}} \right) \right]^n$$

Como $E(X_i^2) < \infty$, entonces φ_{X_i} tiene dos derivadas continuas y, aplicando la fórmula de Taylor

$$\varphi_{X_i}(t) = \varphi_{X_i}(0) + \varphi_{X_i}^{(1)}(0) t + \varphi_{X_i}^{(2)}(\theta) t^2/2$$

donde $|\theta| \leq |t|$.

$$\varphi_{X_i}(t) = \varphi_{X_i}(0) + \varphi_{X_i}^{(1)}(0) t + \varphi_{X_i}^{(2)}(0) \frac{t^2}{2} + \frac{t^2}{2} [\varphi_{X_i}^{(2)}(\theta) - \varphi_{X_i}^{(2)}(0)]$$

donde $\varphi_{X_i}^{(2)}(\theta) - \varphi_{X_i}^{(2)}(0) \rightarrow_{t \rightarrow 0} 0$.

Pero,

$$\varphi_{X_i}(0) = 1 \quad \varphi_{X_i}^{(1)}(0) = i\mu = 0 \quad \varphi_{X_i}^{(2)}(0) = i^2 E(X_i^2) = -\sigma^2$$

Entonces

$$\varphi_{X_i}(t) = 1 - \frac{\sigma^2 t^2}{2} + \frac{t^2}{2} \epsilon(t)$$

donde $\lim_{t \rightarrow 0} \epsilon(t) = 0$.

Para t fijo,

$$\begin{aligned} \left[\varphi_{X_i} \left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}} \right) \right]^n &= \left[1 - \frac{t^2}{2n} + \frac{t^2}{2\sigma^2 n} \epsilon \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \right) \right]^n = \\ &= \left[1 - \frac{t^2}{2n} \left(1 - \frac{1}{\sigma^2} \epsilon \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \right) \right) \right]^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-t^2/2} \end{aligned}$$

pues $1 - \frac{1}{\sigma^2} \epsilon \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$.

Corolario (TCL de De Moivre y Laplace): Sea S_n el número de éxitos en n ensayos Bernoulli independientes con probabilidad p de éxito ($0 < p < 1$), entonces

$$\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \xrightarrow{\mathcal{D}} Z$$

con $Z \sim N(0, 1)$.

Ejemplos: 1) Al sumar números, una calculadora aproxima cada número al entero más próximo. Los errores de aproximación se suponen independientes y con distribución $U(-0.5, 0.5)$.

a) Si se suman 1500 números, cuál es la probabilidad de que la magnitud del error total exceda 15?

$$\begin{aligned} P(|S_{1500}| > 15) &= 1 - P(|S_{1500}| \leq 15) = \\ &= 1 - P(-15 \leq S_{1500} \leq 15) = \\ &= 1 - P\left(\frac{-15}{\sqrt{1500/12}} \leq \frac{S_{1500}}{\sqrt{1500/12}} \leq \frac{15}{\sqrt{1500/12}}\right) \end{aligned}$$

pues $E(X_i) = 0$ y $V(X_i) = 1/12$. Entonces,

$$\begin{aligned} P(|S_{1500}| > 15) &\stackrel{(a)}{=} 1 - \phi(15/11.18) + \phi(-15/11.18) = \\ &= 1 - \phi(1.34) + \phi(-1.34) = 0.18 \end{aligned}$$

b) Cuántos números pueden sumarse a fin de que la magnitud del error total sea menor que 10, con probabilidad 0.90?

$$n \quad \text{tal que} \quad P(|S_n| \leq 10) \geq 0.90$$

$$P(-10 \leq S_n \leq 10) \geq 0.90$$

$$\begin{aligned} P\left(\frac{-10}{\sqrt{n/12}} \leq \frac{S_n}{\sqrt{n/12}} \leq \frac{10}{\sqrt{n/12}}\right) &\geq 0.90 \\ \phi\left(\frac{10}{\sqrt{n/12}}\right) - \phi\left(\frac{-10}{\sqrt{n/12}}\right) &\geq 0.90 \end{aligned}$$

$$2\phi\left(\frac{10}{\sqrt{n/12}}\right) - 1 \geq 0.90$$

$$\frac{10}{\sqrt{n/12}} \geq 1.64$$

$$\sqrt{n} \leq 21.12 \quad n \leq 446$$

2) Sea $X \sim Bi(60, 1/3)$. Calcular en forma aproximada la probabilidad de que X sea mayor o igual que 25.

$$P(X \geq 25) = P(X \geq 24.5) =$$

$$P\left(\frac{X - 20}{\sqrt{13.33}} \geq \frac{24.5 - 20}{\sqrt{13.33}}\right) \stackrel{(a)}{=} 1 - \phi(1.23) = 1 - 0.89 = 0.11$$

Proposición: Sean X y X_1, X_2, \dots v.a. y $g : R \rightarrow R$ una función continua, entonces

$$a) X_n \xrightarrow{pp} X \quad \Rightarrow \quad g(X_n) \xrightarrow{pp} g(X)$$

$$b) X_n \xrightarrow{p} X \quad \Rightarrow \quad g(X_n) \xrightarrow{p} g(X)$$

$$c) X_n \xrightarrow{D} X \quad \Rightarrow \quad g(X_n) \xrightarrow{D} g(X)$$

Ejemplos:

$$1) \quad X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} Z \sim N(0, 1) \quad \Rightarrow \quad X_n^2 \xrightarrow{\mathcal{D}} W \sim \chi_1^2$$

$$2) \quad X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} Z \sim N(0, 1) \quad \Rightarrow \quad c X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} Y \sim N(0, c^2)$$

$$3) \quad X_n \xrightarrow{p} c \quad (c > 0) \quad \Rightarrow \quad \ln(X_n) \xrightarrow{p} \ln(c)$$

Nota: Si g no está definida o no es continua en toda la recta ($g(x) = \ln(x)$ o $g(x) = 1/x$), se puede probar que la proposición anterior es cierta si, para algún abierto A de \mathbb{R} , g es continua en A y $P(X \in A) = 1$.

Teorema de Slutsky: Sean X, X_1, X_2, \dots e Y_1, Y_2, \dots

v.a. tales que $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X, Y_n \xrightarrow{p} c$ (c constante), entonces:

a) $X_n + Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X + c$

b) $X_n - Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X - c$

c) $X_n Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} c X$

d) Si $c \neq 0$ y $P(Y_n \neq 0) = 1$, entonces

$$\frac{X_n}{Y_n} \xrightarrow{\mathcal{D}} \frac{X}{c}$$

Proposición: Sean Y_1, Y_2, \dots v.a. tales que

$$\sqrt{n}(Y_n - \mu) \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0, \sigma^2)$$

Si $g(y)$ es una función derivable en μ , entonces

$$\sqrt{n}(g(Y_n) - g(\mu)) \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0, \sigma^2 (g'(\mu))^2)$$

Nota: Vale si $g'(\mu) = 0$, si se piensa que $N(0, 0)$ equivale a la masa puntual en 0.

Ejemplo: Si X_1, X_2, \dots son v.a. i.i.d. con $E(X_i) = \mu$ y $V(X_i) = \sigma^2 < \infty$ entonces, por el TCL:

$$\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0, 1)$$

$$\sqrt{n} \left(\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma} \right) \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0, 1)$$

$$\sqrt{n} (\bar{X}_n - \mu) \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0, \sigma^2)$$

Sea $g(x) = x^2$, entonces $g'(\mu) = 2\mu$ y

$$\sqrt{n} (\bar{X}_n^2 - \mu^2) \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0, 4\sigma^2\mu^2)$$

Teorema Central del Límite de Lindeberg:

Sean X_1, X_2, \dots v.a. independientes tales que $E(X_n) = \mu_n$ y $V(X_n) = \sigma_n^2 < \infty$ con por lo menos un $\sigma_n > 0$. Sea $S_n = X_1 + \dots + X_n$, entonces para que

$$\frac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{V(S_n)}} \xrightarrow{\mathcal{D}} Z \sim N(0, 1)$$

es suficiente que se satisfaga la siguiente condición:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{s_n^2} \sum_{k=1}^n \int_{|x - \mu_k| > \epsilon s_n} (x - \mu_k)^2 dF_k(x) = 0$$

donde $F_k = F_{X_k}$ y $s_n = \sqrt{V(S_n)} = \sqrt{\sigma_1^2 + \dots + \sigma_n^2}$.

Nota: La condición de Lindeberg significa que los términos

$$\frac{X_k - \mu_k}{s_n} \quad \text{de la suma} \quad \frac{S_n - E(S_n)}{s_n}$$

son uniformemente pequeños para n grande.

Por ejemplo, la condición de Lindeberg implica que

$$\max_{1 \leq k \leq n} \frac{\sigma_k^2}{s_n^2} \rightarrow 0$$

cuando $n \rightarrow \infty$, o sea que las varianzas de cada sumando X_k son uniformemente pequeñas cuando n es grande y, por lo tanto, ningún sumando tiene demasiado peso en la suma $\frac{S_n - E(S_n)}{s_n}$.