PROBABILIDADES

Trabajo Práctico 4

1. a) Sea X una variable aleatoria (v.a) con función de distribución acumulada

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 0.3 & \text{si } 1 \leq x < 3 \\ 0.4 & \text{si } 3 \leq x < 6 \\ 0.6 & \text{si } 6 \leq x < 12 \\ 1 & \text{si } x \geq 12 \end{cases}$$

y sean $A = [3, 6]$ y $B = [4, \infty]$. Calcular $P(A), P(B)$ y $P(A/B)$.

b) Sea X una v.a. con función de distribución acumulada

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -3 \\ \frac{1}{4} & \text{si } -3 \leq x < 1 \\ \frac{3}{4} & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

y sean $A = [-3, 1]$ y $B = (\frac{1}{2}, 3)$. Calcular $P(A), P(B), P(B/A)$ y $P(B/A^c)$.

c) En ambos casos, calcular la función de probabilidad puntual de la v.a. X.

2. Si el espacio muestral Ω es un conjunto infinito, ¿implica ésto necesariamente que cualquier v.a. X definida sobre Ω tendrá un conjunto infinito de valores posibles?. Si la respuesta es afirmativa, aclarar por qué; en caso contrario, dar un ejemplo.

3. Se dispone de dos dados, uno equilibrado y el otro cargado de manera tal que los números 1 y 2 tienen probabilidad $\frac{1}{3}$ y los restantes $\frac{1}{12}$. Se elige un dado al azar y se arroja tres veces. Sea X = "número de veces que sale 1 ó 2".

a) Hallar la función de probabilidad puntual de X.

b) Dado que $X = 3$, ¿cuál es la probabilidad de que se haya elegido el dado cargado?

4. De un conjunto de 7 mujeres y 4 varones se eligen al azar 5 personas. Sea X el número de varones elegidos.

a) Hallar la función de probabilidad puntual de X y graficarla.

b) Hallar la función de distribución acumulada.

c) ¿Cuál es la probabilidad de que el grupo elegido esté formado por al menos 3 varones?

5. Se arroja una moneda equilibrada hasta que aparece por primera vez el mismo resultado 2 veces consecutivas.

a) Describir un espacio muestral adecuado para este experimento y asignar probabilidad a los eventos elementales.

b) Hallar la función de probabilidad puntual de la v.a. X = "número de tiradas necesarias".

c) Hallar la probabilidad de que

   i. el experimento termine antes de la sexta tirada.

   ii. se requiera un número par de tiradas.

6. Se dispone de dos urnas con 5 bolillas cada una. En la urna A hay dos bolillas blancas y tres negras y en la urna B hay una bolilla blanca y cuatro negras. Se tira un dado equilibrado. Si el resultado es múltiplo de 3, se sacan dos bolillas sin reposición de la urna A, y en caso contrario las extracciones se hacen de la urna B.

Sea X el número de bolillas blancas extraídas. Hallar las funciones de probabilidad puntual y de distribución correspondientes a la v.a. X.

7. Sobre el escritorio de una secretaria hay 4 cartas y sus correspondientes sobres. La secretaria introduce las cartas en los sobres al azar.

Sea X = "número de cartas correctamente introducidas".

Hallar las funciones de probabilidad puntual y de distribución correspondientes a la v.a. X.

8. En una fábrica, el 2% de las piezas que se fabrican son defectuosas. Se toma una muestra con reposición de tamaño n. Hallar

a) la probabilidad de que no haya ninguna defectuosa en la muestra.

b) la probabilidad de que haya más buenas que defectuosas.

c) la probabilidad de que haya al menos 2 defectuosas.

d) el número más probable de piezas defectuosas en la muestra cuando $n = 4$ y $n = 100$.

9. En una sucesión de ensayos de Bernoulli con probabilidad p de éxito, hallar la probabilidad de que ocurran A éxitos antes de B fracasos.

Sugerencia: El problema se resuelve después de no más de $A + B - 1$ ensayos. Este problema contesta la pregunta acerca de la manera de dividir la apuesta cuando el juego se interrumpe en el momento en que a un jugador le faltan A puntos para ganar y al otro le faltan B puntos.

10. Un experimento consiste en tirar un dado equilibrado hasta obtener el primer as. Sea X el número de tiradas necesarias.

a) Hallar las funciones de probabilidad puntual y de distribución de la v.a. X.

b) Calcular la probabilidad de que sean necesarias un nḿero par de tiradas.

c) Sea Y la v.a. que cuenta el número de tiradas necesarias hasta obtener el tercer as. Obtener la función de probabilidad de Y (distribución binomial negativa).

11. Sea X una v.a. con distribución geométrica de parámetro p $(0 < p < 1)$.

a) Probar que para todo número natural k,

$$P(X > k) = (1 - p)^k$$

b) Verificar que si s y t son números naturales, entonces

$$P(X \geq s + t / X > t) = P(X \geq s)$$

Esta propiedad se denomina "falta de memoria".

c) Mostrar que la única distribución discreta con esta propiedad es la geométrica de parámetro $p = P(X = 1)$.

12. Para verificar si se cumplen las normas establecidas para arrojar residuos al río Reconquista, un inspector visita al azar 10 de las 50 industrias establecidas a orillas de dicho río.

a) Si en realidad 35 industrias no cumplen con alguna de las normas, ¿cuál es la función de probabilidad puntual de la v.a. X = "número de industrias que están en infracción"?

b) Si hay 500 industrias establecidas, de las cuáles 350 están en infracción, aproximar la función de probabilidad puntual hallada en a) por una más simple.

13. Un comprador de componentes eléctricos los adquiere en lotes de tamaño 10. Antes de comprar un lote, inspecciona 3 componentes elegidos al azar del mismo y lo acepta si ninguno de los componentes seleccionados tiene fallas. Si el 30% de los lotes tienen 4 componentes defectuosos y el 70 % sólo tiene 1 componente defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que el comprador rechace un lote?

14. Sea X una v.a. con distribución de Poisson de parámetro λ.

a) Mostrar que $P(X = i)$ crece en forma monótona en función de i y luego decrece, alcanzando su máximo cuando i es el mayor entero menor o igual que λ.

Sugerencia: Considerar $P(X = i) \ / \ P(X = i - 1)$.

b) Hallar el valor de λ que maximiza $P(X = k), k \geq 0$.

15. En un concurso de pesca cada pescador paga 100$ por participar. La cantidad de peces que cada pescador puede obtener durante el desarrollo del concurso es una v.a. con distribución de Poisson de parámetro $\lambda = 4.5$. Cada pescador tiene permitido cobrar a lo sumo 8 piezas. Hay un premio de 50$ por cada pieza.

Calcular la función de probabilidad puntual de la ganancia neta.

16. Un minorista ha verificado que la demanda semanal de cajones de cierto producto es una v.a. con distribución de Poisson de parámetro $\lambda = 2$. Completa su existencia los lunes por la mañana de manera de tener 4 cajones al principio de la semana. Al efectuar un análisis de la actividad de su negocio, se le plantean las siguientes preguntas:

a) ¿Cuál es la probabilidad de vender todo su stock durante la semana?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que sea incapaz de cumplir con un pedido por lo menos?

c) ¿Cuál es la distribución del número de cajones vendidos en una semana?

d) ¿Con cuántos cajones debería iniciar la semana a fin de que la probabilidad de cumplir con todos sus pedidos fuese mayor o igual que 0.99?

e) ¿Cuál es el número más probable de cajones pedidos en una semana?

17. El número de personas que entran a un casino constituye un proceso de Poisson de intensidad $\lambda = 1$ persona cada 2 minutos.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que no entre ninguna persona entre las 12:00 y las 12:06?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que entren al menos 4 personas en el mismo período?