

## Vectores aleatorios.

### Extensión a más de dos dimensiones

Definición: Sean  $X_1, \dots, X_k$  variables aleatorias discretas, la **función de probabilidad conjunta** del vector aleatorio  $(X_1, \dots, X_k)$  se define como:

$$p_{X_1, \dots, X_k}(x_1, \dots, x_k) = P(X_1 = x_1, \dots, X_k = x_k)$$

y, dado cualquier conjunto  $A \subset \mathfrak{R}^k$ ,

$$P((X_1, \dots, X_k) \in A) = \sum_{(x_1, \dots, x_k) \in A} p_{X_1, \dots, X_k}(x_1, \dots, x_k)$$

Esta función satisface las siguientes propiedades:

- $p_{X_1, \dots, X_k}(x_1, \dots, x_k) \geq 0 \quad \forall (x_1, \dots, x_k)$
- $\sum_{x_1} \dots \sum_{x_k} p_{X_1, \dots, X_k}(x_1, x_2, \dots, x_k) = 1$

En forma similar a lo hecho para el caso bidimensional se pueden definir las **funciones de probabilidad marginal**. Por ejemplo, la función de probabilidad marginal de  $X_1$  está dada por:

$$p_{X_1}(x_1) = \sum_{x_2} \dots \sum_{x_k} p_{X_1, \dots, X_k}(x_1, x_2, \dots, x_k)$$

y la función de probabilidad marginal de  $(X_1, X_2)$  está dada por:

$$p_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = \sum_{x_3} \dots \sum_{x_k} p_{X_1, \dots, X_k}(x_1, x_2, \dots, x_k)$$

Distribución multinomial: Es una generalización de la distribución Binomial. Supongamos que se repite  $n$  veces en forma independiente una experiencia, que en cada repetición hay  $k$  resultados posibles ( $k \geq 2$ ), cada uno de los cuales ocurre con probabilidad  $p_i$  ( $1 \leq i \leq k$ ) y que estas probabilidades se mantienen constantes en todas las repeticiones. Este experimento se denomina experimento multinomial. Si definimos

$X_i$ : número de veces que ocurre el resultado  $i$  ( $1 \leq i \leq k$ )

la distribución conjunta de  $(X_1, \dots, X_k)$  se denomina distribución multinomial de parámetros  $n, p_1, \dots, p_k$ .

Notación:  $(X_1, \dots, X_k) \sim M(n, p_1, \dots, p_k)$

La correspondiente función de probabilidad conjunta está dada por

$$p_{X_1, \dots, X_k}(x_1, \dots, x_k) = \begin{cases} \frac{n!}{x_1! x_2! \dots x_k!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} \dots p_k^{x_k} & \text{si } 0 \leq x_i \leq n \forall i, \sum_{i=1}^k x_i = n \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (1)$$

En efecto, en primer lugar hay que notar que si  $x_1 + x_2 + \dots + x_k \neq n$ , la función de probabilidad puntual es cero. Sean ahora  $0 \leq x_i \leq n$ , tales que  $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$ . Indicando por  $R_i$  ( $1 \leq i \leq k$ ) cada uno de los  $k$  resultados posibles, una de las posibles configuraciones que producen  $x_i$  resultados  $R_i$  ( $1 \leq i \leq k$ ), es

$$\underbrace{R_1 \dots R_1}_{x_1} \underbrace{R_2 \dots R_2}_{x_2} \dots \underbrace{R_k \dots R_k}_{x_k}$$

(alguno de los  $x_i$ 's podría ser 0, en cuyo caso no aparecería ningún  $R_i$ ).

Como hemos supuesto independencia entre las repeticiones, esa configuración tiene probabilidad  $p_1^{x_1} p_2^{x_2} \dots p_k^{x_k}$ , pero es sólo una de las configuraciones posibles que producen  $x_i$  resultados  $R_i$  para  $1 \leq i \leq k$ .

¿Cuántas configuraciones diferentes hay?

$$\begin{aligned} \binom{n}{x_1} \cdot \binom{n-x_1}{x_2} \cdot \binom{n-x_1-x_2}{x_3} \dots \binom{x_k}{x_k} &= \frac{n!}{x_1!(n-x_1)!} \cdot \frac{(n-x_1)!}{x_2!(n-x_1-x_2)!} \dots \frac{x_k!}{x_k!0!} = \\ &= \frac{n!}{x_1! x_2! \dots x_k!} \end{aligned}$$

y se obtiene la función de probabilidad dada en (1).

Observación: La distribución marginal de  $X_i$  es binomial de parámetros  $n$  y  $p_i$  para todo  $1 \leq i \leq k$ . En general, las marginales de una distribución multinomial son binomiales o multinomiales.

Ejemplo: De una urna que contiene 3 bolillas rojas, 2 negras, 4 azules y 1 blanca se extraen 12 bolillas *con reposición*. Definiendo

$X_1$ : número de bolillas rojas  
 $X_2$ : número de bolillas negras  
 $X_3$ : número de bolillas azules  
 $X_4$ : número de bolillas blancas

el vector  $(X_1, X_2, X_3, X_4)$  tiene distribución multinomial, es decir

$$(X_1, X_2, X_3, X_4) \sim M\left(12, \frac{3}{10}, \frac{2}{10}, \frac{4}{10}, \frac{1}{10}\right)$$

a) ¿Cuál es la probabilidad de que se obtengan 3 bolillas rojas, 5 negras, 4 azules y ninguna blanca?

$$p_{X_1, X_2, X_3, X_4}(3, 5, 4, 0) = \frac{12!}{3!5!4!0!} \left(\frac{3}{10}\right)^3 \left(\frac{2}{10}\right)^5 \left(\frac{4}{10}\right)^4 \left(\frac{1}{10}\right)^0 = 0.006$$

b) Calcular la probabilidad de obtener a lo sumo dos bolillas rojas.

Como  $X_1 \sim \text{Bi}\left(12, \frac{3}{10}\right)$ , entonces

$$P(X_1 \leq 2) = \sum_{i=0}^2 p_{X_1}(i) = \sum_{i=0}^2 \binom{12}{i} \left(\frac{3}{10}\right)^i \left(\frac{7}{10}\right)^{12-i} = 0.25$$

c) Calcular la probabilidad de obtener 3 bolillas rojas y 2 blancas.

Como las v.a. que nos interesan son  $X_1$  y  $X_4$ , defino una nueva v.a.  $Y = X_2 + X_3$ . El vector aleatorio  $(X_1, X_4, Y)$  también tendrá distribución multinomial.

$$(X_1, X_4, Y) \sim M\left(12, \frac{3}{10}, \frac{1}{10}, \frac{6}{10}\right)$$

y, por lo tanto, la probabilidad pedida será

$$p_{X_1, X_4, Y}(3, 2, 7) = \frac{12!}{3!2!7!} \left(\frac{3}{10}\right)^3 \left(\frac{1}{10}\right)^2 \left(\frac{6}{10}\right)^7 = 0.06$$

Definición: El vector aleatorio  $(X_1, \dots, X_k)$  es continuo si existe una función  $f_{X_1, \dots, X_k} : \mathfrak{R}^k \rightarrow \mathfrak{R}^{\geq 0}$ , denominada **función de densidad conjunta**, tal que

$$P((X_1, \dots, X_k) \in A) = \int_A \dots \int f_{X_1, \dots, X_k}(x_1, x_2, \dots, x_k) dx_1 \dots dx_k \quad \forall A \subseteq \mathfrak{R}^k$$

Esta función satisface las siguientes propiedades:

- $f_{X_1, \dots, X_k}(x_1, \dots, x_k) \geq 0 \quad \forall (x_1, \dots, x_k)$
- $\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1, \dots, X_k}(x_1, \dots, x_k) dx_1 \dots dx_k = 1$

En forma similar a lo hecho para el caso bidimensional se pueden definir las **funciones de densidad marginal**. Por ejemplo, la función de densidad marginal de  $X_1$  está dada por:

$$f_{X_1}(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1, \dots, X_k}(x_1, x_2, \dots, x_k) dx_2 \dots dx_k$$

y la función de densidad marginal de  $(X_1, X_2)$ , está dada por:

$$f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1, \dots, X_k}(x_1, x_2, \dots, x_k) dx_3 \dots dx_k$$

**Definición:**  $X_1, \dots, X_k$  son variables aleatorias **independientes** si y sólo si

$$p_{X_1, \dots, X_k}(x_1, \dots, x_k) = p_{X_1}(x_1) \dots p_{X_k}(x_k) \quad \forall (x_1, \dots, x_k) \quad \text{en el caso discreto}$$

$$f_{X_1, \dots, X_k}(x_1, \dots, x_k) = f_{X_1}(x_1) \dots f_{X_k}(x_k) \quad \forall (x_1, \dots, x_k) \quad \text{en el caso continuo}$$

**Ejemplos:** 1) En el caso de la distribución multinomial, las componentes del vector aleatorio son v.a. con distribución binomial no independientes y esto que es intuitivo ya que su suma es constante (es igual a  $n$ ), puede verificarse aplicando la definición.

2) Sea  $(X_1, X_2, X_3)$  un vector aleatorio con distribución uniforme en el prisma de vértices  $(0,0,0), (1,0,0), (0,2,0), (1,2,0), (0,0,3), (1,0,3), (0,2,3), (1,2,3)$ , cuyo volumen es igual a 6. Entonces, su función de densidad conjunta dada por

$$f_{X_1, X_2, X_3}(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} 1/6 & \text{si } 0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 2, 0 \leq x_3 \leq 3 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Es inmediato verificar que las componentes del vector son variables aleatorias independientes, ya que

$$f_{X_1}(x_1) = \begin{cases} \int_0^3 \int_0^2 \frac{1}{6} dx_2 dx_3 = \frac{1}{6} \cdot 6 = 1 & \text{si } x_1 \in [0,1] \\ 0 & \text{si } x_1 \notin [0,1] \end{cases}$$

$$f_{X_2}(x_2) = \begin{cases} \int_0^3 \int_0^1 \frac{1}{6} dx_1 dx_3 = \frac{1}{6} \cdot 3 = \frac{1}{2} & \text{si } x_2 \in [0,2] \\ 0 & \text{si } x_2 \notin [0,2] \end{cases}$$

$$f_{X_3}(x_3) = \begin{cases} \int_0^2 \int_0^1 \frac{1}{6} dx_1 dx_2 = \frac{1}{6} \cdot 2 = \frac{1}{3} & \text{si } x_3 \in [0,3] \\ 0 & \text{si } x_3 \notin [0,3] \end{cases}$$

entonces,

$$f_{X_1, X_2, X_3}(x_1, x_2, x_3) = f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) f_{X_3}(x_3) \quad \forall (x_1, x_2, x_3)$$

## Distribución de la suma de dos variables aleatorias

Sean  $X$  e  $Y$  dos v.a. de las cuáles se conoce la distribución conjunta. Estamos interesados en la distribución de la v.a.  $V = X + Y$ .

Consideraremos dos ejemplos, uno para el caso de un vector aleatorio discreto y otro para el caso continuo.

Ejemplos: 1) Sean  $X \sim P(\lambda)$  e  $Y \sim P(\mu)$ , v.a. independientes, y sea  $V = X + Y$ . Claramente el recorrido de la v.a.  $V$  es el conjunto  $R_V = \{0, 1, 2, \dots\}$ . Sea  $k \in R_V$ ,

$$P(X + Y = k) = \sum_{i=0}^{\infty} p_{XY}(i, k-i) = \sum_{i=0}^k p_X(i) p_Y(k-i)$$

por ser  $X$  e  $Y$  independientes. Entonces,

$$P(X + Y = k) = \sum_{i=0}^k \frac{e^{-\lambda} \lambda^i}{i!} \cdot \frac{e^{-\mu} \mu^{k-i}}{(k-i)!} = \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{k!} \sum_{i=0}^k \frac{k!}{i!(k-i)!} \lambda^i \mu^{k-i} =$$

$$= \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{k!} (\lambda + \mu)^k.$$

Entonces,  $V = X + Y$  tiene distribución de Poisson de parámetro  $\lambda + \mu$ . O sea

$$X + Y \sim P(\lambda + \mu)$$

Este resultado se extiende por inducción al caso de  $n$  v.a. : si  $X_1, \dots, X_n$  son v.a. independientes tales que  $X_i \sim P(\lambda_i)$  para  $i = 1, \dots, n$ , entonces  $X_1 + \dots + X_n \sim P(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)$ .

2) Sean  $X$  e  $Y$  v.a. independientes con distribución exponencial de parámetro  $\lambda$ , o sea, sean  $X \sim E(\lambda)$  e  $Y \sim E(\lambda)$  independientes, y sea  $V = X + Y$ . La v.a.  $V$  toma valores en el intervalo  $(0, \infty)$ , por lo tanto, si  $v \leq 0$ ,  $F_V(v) = 0$ . Sea  $v > 0$ ,

$$F_V(v) = P(X + Y \leq v) = \iint_{\{(x,y)/x+y \leq v\}} f_{XY}(x,y) dx dy = \iint_{\{(x,y)/x+y \leq v\}} f_X(x) f_Y(y) dx dy$$

pues  $X$  e  $Y$  son independientes. Entonces,

$$P(X + Y \leq v) = \int_0^v \left( \int_0^{v-y} f_X(x) f_Y(y) dx \right) dy = \int_0^v \left( \int_0^{v-y} \lambda e^{-\lambda x} \lambda e^{-\lambda y} dx \right) dy =$$

$$= \int_0^v \lambda e^{-\lambda y} \left( \int_0^{v-y} \lambda e^{-\lambda x} dx \right) dy = \int_0^v \lambda e^{-\lambda y} \left( 1 - e^{-\lambda(v-y)} \right) dy =$$

$$= \int_0^v \lambda e^{-\lambda y} dy - \int_0^v \lambda e^{-\lambda v} dy = 1 - e^{-\lambda v} - \lambda e^{-\lambda v} v$$

Derivando respecto de  $v$ , se obtiene la densidad de  $V = X + Y$ , que es

$$f_V(v) = \left( \lambda e^{-\lambda v} + \lambda^2 e^{-\lambda v} v - \lambda e^{-\lambda v} \right) I_{(0,\infty)}(v) = \lambda^2 e^{-\lambda v} v I_{(0,\infty)}(v)$$

lo que demuestra que  $V$  tiene distribución Gamma de parámetros  $(2, \lambda)$ .

3) Se puede demostrar que, en general, si  $X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$  e  $Y \sim \Gamma(\beta, \lambda)$  son variables aleatorias independientes, entonces

$$X + Y \sim \Gamma(\alpha + \beta, \lambda)$$

**Función generadora de momentos de la suma de v.a. independientes:** Sean, en principio  $X$  e  $Y$  dos v.a. independientes, entonces la función generadora de la suma  $X + Y$  es el producto de las funciones generadoras, es decir

$$M_{X+Y}(t) = M_X(t) M_Y(t)$$

En efecto, si por ejemplo  $X$  e  $Y$  son dos v.a. continuas e independientes,

$$\begin{aligned} M_{X+Y}(t) &= E(e^{t(X+Y)}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{t(x+y)} f_{XY}(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} e^{ty} f_X(x) f_Y(y) dx dy = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f_X(x) dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{ty} f_Y(y) dy = E(e^{tX}) E(e^{tY}) = M_X(t) M_Y(t) \end{aligned}$$

como queríamos demostrar. Para el caso discreto, se demuestra en forma similar.

Es inmediato verificar, usando inducción que, si  $X_1, X_2, \dots, X_n$  son v.a. independientes,

$$M_{X_1+X_2+\dots+X_n}(t) = \prod_{i=1}^n M_{X_i}(t)$$

Ejemplos: 1) Demostremos, usando funciones generadoras de momentos que si  $X \sim P(\lambda)$  e  $Y \sim P(\mu)$  son v.a. independientes,  $X + Y \sim P(\lambda + \mu)$ . En efecto,

$$M_{X+Y}(t) = M_X(t) M_Y(t) = e^{\lambda(e^t-1)} e^{\mu(e^t-1)} = e^{(\lambda+\mu)(e^t-1)}$$

y se obtiene la función generadora de momentos de una v.a. Poisson con parámetro  $(\lambda + \mu)$ . Recordemos que la función generadora de momentos determina la distribución de la v.a..

2) Demostremos ahora, usando funciones generadoras de momentos que si  $X$  e  $Y$  son v.a. independientes con distribución exponencial de parámetro  $\lambda$  o sea  $X \sim E(\lambda)$  e  $Y \sim E(\lambda)$ , entonces  $V = X + Y \sim \Gamma(2, \lambda)$ . En efecto,

$$M_{X+Y}(t) = M_X(t)M_Y(t) = \frac{\lambda}{\lambda-t} \frac{\lambda}{\lambda-t} = \left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)^2$$

y se obtiene la función generadora de momentos de una v.a.  $I(2, \lambda)$  como queríamos demostrar.

## Sumas y promedios de variables aleatorias

**Propiedad:** Sean  $X_1, X_2, \dots, X_n$  v.a. cualesquiera con  $E(X_i) = \mu_i$  y  $V(X_i) = \sigma_i^2$  y  $a_1, a_2, \dots, a_n$  números reales, entonces

$$E\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i \mu_i \tag{1}$$

$$V\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{i < j} a_i a_j \text{cov}(X_i, X_j)$$

Dem: En primer lugar, probemos la expresión para la esperanza mediante inducción en  $n$ . Si  $n = 2$ , ya hemos demostrado que

$$E(a_1 X_1 + a_2 X_2) = a_1 E(X_1) + a_2 E(X_2)$$

Supongamos ahora que la expresión es cierta para  $n = k$  y probémosla para  $n = k + 1$ .

En primer lugar,

$$E\left(\sum_{i=1}^{k+1} a_i X_i\right) = E\left(\sum_{i=1}^k a_i X_i + a_{k+1} X_{k+1}\right) = E(Y + a_{k+1} X_{k+1})$$

siendo  $Y = \sum_{i=1}^k a_i X_i$ . Como para  $n = 2$  se cumple, se obtiene

$$E\left(\sum_{i=1}^{k+1} a_i X_i\right) = E(Y + a_{k+1} X_{k+1}) = E(Y) + a_{k+1} E(X_{k+1}) = E\left(\sum_{i=1}^k a_i X_i\right) + a_{k+1} \mu_{k+1}$$

y, utilizando la hipótesis inductiva

$$E\left(\sum_{i=1}^{k+1} a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^k a_i \mu_i + a_{k+1} \mu_{k+1} = \sum_{i=1}^{k+1} a_i \mu_i$$

como queríamos demostrar.

Probemos ahora la expresión correspondiente a la varianza. Observemos en primer lugar que si  $n = 2$ ,

$$\begin{aligned}
 V(a_1X_1 + a_2X_2) &= E\left(\left[(a_1X_1 + a_2X_2) - E(a_1X_1 + a_2X_2)\right]^2\right) = \\
 &= E\left(\left[(a_1X_1 + a_2X_2) - (a_1\mu_1 + a_2\mu_2)\right]^2\right) = E\left(\left[(a_1X_1 - a_1\mu_1) + (a_2X_2 - a_2\mu_2)\right]^2\right) = \\
 &= E(a_1(X_1 - \mu_1))^2 + E(a_2(X_2 - \mu_2))^2 + 2E[a_1a_2(X_1 - \mu_1)(X_2 - \mu_2)] = \\
 &= a_1^2V(X_1) + a_2^2V(X_2) + 2a_1a_2 \operatorname{cov}(X_1, X_2)
 \end{aligned}$$

y, por lo tanto, se satisface la expresión para  $n = 2$ .

En general,

$$\begin{aligned}
 V\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i\right) &= \operatorname{cov}\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i, \sum_{i=1}^n a_i X_i\right) = E\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i \cdot \sum_{j=1}^n a_j X_j\right) - E\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i\right)E\left(\sum_{j=1}^n a_j X_j\right) = \\
 &= E\left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j X_i X_j\right) - \left(\sum_{i=1}^n a_i \mu_i\right)\left(\sum_{j=1}^n a_j \mu_j\right) = \\
 &= \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j E(X_i X_j)\right) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j \mu_i \mu_j = \\
 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j (E(X_i X_j) - \mu_i \mu_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j \operatorname{cov}(X_i, X_j)
 \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que si  $i = j$   $\operatorname{cov}(X_i, X_i) = V(X_i)$  y que  $\operatorname{cov}(X_i, X_j) = \operatorname{cov}(X_j, X_i)$ , obtenemos el resultado que queríamos demostrar.

**Corolario:** Sean  $X_1, X_2, \dots, X_n$  v.a. **independientes** con  $E(X_i) = \mu_i$  y  $V(X_i) = \sigma_i^2$  y  $a_1, a_2, \dots, a_n$  números reales, entonces

$$E\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i \mu_i \qquad V\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i^2 \sigma_i^2$$

Dem: Resulta inmediatamente del hecho que, por ser las v.a. independientes,

$$\operatorname{cov}(X_i, X_j) = 0 \quad \forall i \neq j.$$

Corolario: Sean  $X_1, X_2, \dots, X_n$  v.a. **independientes e idénticamente distribuidas** (i.i.d.) con  $E(X_i) = \mu$  y  $V(X_i) = \sigma^2 \quad \forall i = 1, \dots, n$  y  $a_1, a_2, \dots, a_n$  números reales, entonces

$$E\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i\right) = \mu \sum_{i=1}^n a_i \quad V\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i\right) = \sigma^2 \sum_{i=1}^n a_i^2$$

Dem: Se verifica inmediatamente a partir del corolario anterior.

Propiedad: Sean  $X_1, X_2, \dots, X_n$  v.a. independientes e idénticamente distribuidas (i.i.d.) con  $E(X_i) = \mu$  y  $V(X_i) = \sigma^2 \quad \forall i = 1, \dots, n$ , entonces

$$\text{a) } E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = n\mu \quad V\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = n\sigma^2$$

$$\text{b) } E(\bar{X}) = E\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}\right) = \mu \quad V(\bar{X}) = V\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}\right) = \frac{\sigma^2}{n}$$

Dem: Ejercicio.