Función generadora de momentos:

Definición: Si X es una variable aleatoria, el momento de orden k de X se define como

$$E(X^k)$$

siempre que la esperanza exista.

Notemos que

$E(X) = \mu$	1er momento: posición
$E(X^2) = \sigma^2 + \mu^2$	2do momento: dispersión
$E(X^3)$	3er momento: relacionado con una medida de asimetría
$E(X^4)$	4to momento: relacionado con la kurtosis

Definición: La función generadora de momentos de una v.a. X es una función a valores reales $M_X(t)$, definida como

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \begin{cases} \sum_{x \in R_X} e^{tx} p_X(x) & \text{si } X \text{ es discreta} \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f_X(x) dx & \text{si } X \text{ es continua} \end{cases}$$

siempre que el valor esperado exista para todo $t \in (-h, h), h > 0$. Esta última es una condición técnica necesaria para que $M_X(t)$ sea diferenciable en 0.

Se denomina función generadora de momentos porque los momentos de X $(E(X^n))$ pueden ser obtenidos derivando esta función y evaluando la derivada en t = 0, tal como lo establece el siguiente teorema.

Teorema: Sea X una v.a. para la cual existe la función generadora de momentos $M_X(t)$, entonces

$$E(X^n) = \left. \frac{\partial^n}{\partial t^n} M_X(t) \right|_{t=0}$$

La demostración se basa en el siguiente lema de Cálculo avanzado (ver por ejemplo, Advanced Calculus, D. Widder (1961)):

Lema: Si la función *g(t)* definida por

$$g(t) = \sum_x e^{tx} p(x) \qquad \text{ó} \qquad g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)dx$$

converge para todo $t \in (-h, h)$ para algún $h > 0$, entonces existen las derivadas de orden *n* de *g(t)* para todo $t \in (-h, h)$ y para todo *n* entero positivo y se obtienen como

$$\frac{\partial^n g(t)}{\partial t^n} = \sum_x \frac{\partial^n e^{tx}}{\partial t^n} p(x) \qquad \text{ó} \qquad \frac{\partial^n g(t)}{\partial t^n} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^n e^{tx}}{\partial t^n} f(x)dx$$

Demostración del Teorema: Si la función generadora de momentos existe para todo $t \in (-h, h)$ para algún $h > 0$, aplicando el lema,

$$\frac{\partial^n M_X(t)}{\partial t^n} = \sum_x \frac{\partial^n e^{tx}}{\partial t^n} p(x) \qquad \text{ó} \qquad \frac{\partial^n M_X(t)}{\partial t^n} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^n e^{tx}}{\partial t^n} f(x)dx$$

$$\frac{\partial^n M_X(t)}{\partial t^n} = \sum_x x^n e^{tx} p(x) \qquad \text{ó} \qquad \frac{\partial^n M_X(t)}{\partial t^n} = \int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{tx} f(x)dx$$

Evaluando estas derivadas en 0 ,

$$\left.\frac{\partial^n M_X(t)}{\partial t^n}\right|_{t=0} = \sum_x x^n p(x) = E(X^n) \qquad \text{ó} \qquad \left.\frac{\partial^n M_X(t)}{\partial t^n}\right|_{t=0} = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x)dx = E(X^n)$$

Ejemplos: 1) Sea X una v.a. con distribución exponencial de parámetro λ, o sea con densidad

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} I_{(0,\infty)}(x)$$

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \int_0^{\infty} e^{tx} \lambda e^{-\lambda x} dx = \lambda \int_0^{\infty} e^{-(\lambda - t)x} dx = \frac{\lambda}{\lambda - t} \int_0^{\infty} (\lambda - t) e^{-(\lambda - t)x} dx = \frac{\lambda}{\lambda - t}$$

siempre que $t < \lambda$.

Calculemos ahora E(X) y V(X).

$$E(X)=\left.\frac{\partial M_X(t)}{\partial t}\right|_{t=0}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)\Bigg|_{t=0}=\left.\frac{\lambda}{(\lambda-t)^2}\right|_{t=0}=\frac{1}{\lambda}.$$

Como $V(X)=E(X^2)-\left(E(X)\right)^2$, calculemos $E(X^2)$.

$$E(X^2)=\left.\frac{\partial^2 M_X(t)}{\partial t^2}\right|_{t=0}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\lambda}{\left(\lambda-t\right)^2}\right)\Bigg|_{t=0}=\left.\frac{2\lambda(\lambda-t)}{(\lambda-t)^4}\right|_{t=0}=\frac{2}{\lambda^2}$$

entonces, $V(X)=\frac{2}{\lambda^2}-\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{\lambda^2}$.

2) Sea *X* una v.a. con distribución Binomial de parámetros, *n* y *p*, o sea *X* ~ Bi(*n, p*). Su función de probabilidad puntual es

$$p_X(k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \qquad \text{si } 0\le k\le n$$

$$M_X(t)=E(e^{tX})=\sum_{k=0}^{n}e^{tk}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(e^t p)^k(1-p)^{n-k}=(e^t p+1-p)^n.$$

Calculemos ahora E(*X*) y V(*X*).

$$E(X)=\left.\frac{\partial M_X(t)}{\partial t}\right|_{t=0}=\left.\frac{\partial(e^t p+1-p)^n}{\partial t}\right|_{t=0}=n(e^t p+1-p)^{n-1}pe^t\Big|_{t=0}=np.$$

$$E(X^2)=\left.\frac{\partial^2 M_X(t)}{\partial t^2}\right|_{t=0}=\frac{\partial}{\partial t}\left(n(e^t p+1-p)^{n-1}pe^t\right)\Big|_{t=0}=$$

$$=\left(n(n-1)(e^t p+1-p)^{n-2}\left(pe^t\right)^2+n(e^t p+1-p)^{n-1}pe^t\right)\Big|_0=n(n-1)p^2+np.$$

Entonces, $V(X)=E(X^2)-\left(E(X)\right)^2=n(n-1)p^2+np-\left(np\right)^2=-np^2+np=np(1-p)$.

<u>Propiedad</u>: Sea *X* una v.a. con función generadora de momentos $M_X(t)$, entonces si *Y = a X + b* , entonces $M_Y(t)=e^{bt}\,M_X(at)$.

Dem: Ejercicio.

Unicidad de $M_X(t)$: Además de permitir calcular momentos de una v.a., la función generadora de momentos permite identificar la función de densidad o de probabilidad de una v.a. debido a la propiedad de **unicidad**, la cual establece que hay una correspondencia uno a uno entre funciones de densidad o probabilidad y funciones generadoras de momentos.

Teorema de Unicidad: Si existe la función generadora de momentos de una variable aleatoria, es única. Además la función generadora de momentos determina a la función de densidad o probabilidad de la v.a. salvo a lo sumo en un conjunto de probabilidad 0.

A continuación, presentamos una tabla con la función generadora de momentos de algunas de las familias de distribución que hemos estudiado.

Distribución	$M_X(t)$
Bi(n,p)	$(e^t p + 1 - p)^n$
P(λ)	$e^{\lambda(e^t - 1)}$
N(μ,σ²)	$e^{\frac{\sigma^2 t^2}{2} + \mu t}$
E(λ)	$\dfrac{\lambda}{\lambda - t}$
G(α,λ)	$\left(\dfrac{\lambda}{\lambda - t}\right)^{\alpha}$
U(a,b)	$\dfrac{e^{tb} - e^{ta}}{t(b-a)}$
G(p)	$\dfrac{p\, e^t}{1 - (1-p)\, e^t}$
BN(r,p)	$\left(\dfrac{p\, e^t}{1 - (1-p)\, e^t}\right)^r$

Ejercicio: ¿Para qué valores de *t* existe cada una de las funciones generadoras de momentos de la tabla anterior?