PROBABILIDADES Y ESTADÍSTICA (C)

Práctica 3 de Laboratorio

1. El objetivo de este ejercicio es utilizar la ley de los grandes números para aproximar integrales de funciones continuas en intervalos finitos, tal como se propone en el ejercicio 11 de la Práctica 5. Esta vez procuraremos aproximar la probabilidad de que una variable $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$ tome valores en un intervalo $[a,b]$. Es decir, queremos aproximar numéricamente la siguiente integral

$$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \, exp^{-\frac{x^2}{2}} \, dx \, . \tag{1}$$

Para ello, consideremos la siguiente propuesta:

(a) Sea U una variable con distribución uniforme en el intervalo $[0,1]$: $U \sim \mathcal{U}[0,1]$. Dados $a, b \in \mathbb{R}$, encontrar α y β de forma tal que $Y = \alpha U + \beta$ tenga distribución uniforme en el intervalo $[a,b]$: $Y \sim \mathcal{U}[a,b]$.

(b) A partir de $U_1, U_2, \ldots$ variables i.i.d. con $U_i \sim \mathcal{U}[0,1]$ construir variables aleatorias $Y_1, Y_2, \ldots$ i.i.d. con $Y_i \sim \mathcal{U}[a,b]$, y calcular el

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \, exp^{-\frac{Y_i^2}{2}}}{n}$$

en probabilidad.

(c) Luego aproximar la integral (1) mediante

$$(b-a) \, \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \, exp^{-\frac{Y_i^2}{2}}}{n} \, ,$$

para los siguientes valores de a y b, y para $n = 100$, 1000 y 50000.

i. $a = -1.96$ y $b = 1.96$.
ii. $a = -2$ y $b = 1$.
iii. $a = 0$ y $b = 2.34$.

(d) Comparar los resultados obtenidos con aquellos que calcularía utilizando la tabla de la función Φ.

2. En este ejercicio estudiaremos la distribución del promedio de variables independientes e idénticamente distribuidas y a través de los histogramas correspondientes analizaremos el comportamiento de estas distribuciones a medida que promediamos un número creciente de variables aleatorias.

Para ello generaremos una muestra de variables aleatorias con una disitribución dada y luego calcularemos el pomedio de cada muestra. Replicaremos esto mil veces, es decir, generaremos una muestra aleatoria de la variable $\overline{X}$ de tamaño 1000. Observe que, en principio, desconocemos la distribución de $\overline{X}$. A partir de todas las replicaciones realizaremos un histograma para los promedios obtenidos para obtener una aproximación de densidad / función de probabilidad de $\overline{X}$.

(a) Considere dos variables aleatorias X_1 y X_2 independientes con distribución $U(0,1)$ y el promedio de ambas, es decir,

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2}{2}\,.$$

Generando una muestra de dos variables aleatorias con distribución $U(0,1)$ compute la variable promedio. Replique 1000 veces y a partir de los valores replicados realice un histograma. ¿ Qué características tiene este histograma?

(b) Aumentemos a cinco las variables promediadas. Considere ahora 5 variables aleatorias uniformes independientes, es decir $X_1, X_2, \ldots, X_5$ i.i.d. con $X_i \sim U(0,1)$ y defina

$$\overline{X} = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{n} X_i\,.$$

Generando muestras de cinco variables aleatorias con distribución $U(0,1)$ compute la variable promedio. Repita 1000 veces y realice un histograma para los valores obtenidos. Compare con el histograma anterior.

¿Qué observa?

(c) Aumentemos aún más la cantidad de variables promediadas. Generando muestras de 30 variables aleatorias con distribución $U(0,1)$ repita el ítem anterior.

¿Qué observa?

(d) Idem anterior generando muestras de 200 variables aleatorias. ¿Qué pasa con más?

(e) Repita los ítems 1 a 4 generando ahora variables con distribución $\mathcal{E}(\lambda)$ para distintos valores de λ. Compare los resultados obtenidos.

(f) Repita los ítems 1 a 4 generando ahora variables con distribución $Bi(1,p)$ para $p = 0.5, 0.01$ y 0.0001.

<u>Conclusiones</u>: